Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 2

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

В. Я. ИВРИЙ

ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 II 1976)

В работе ([1]) изучались WF (волновые фронты) решений некоторых гиперболических псевдодифференциальных уравнений с характеристиками переменной кратности. При этом предполагалось выполнение двух условий на младшие члены, обеспечивающих корректность задачи Коши; эти условия называются обобщенными условиями Е. Е. Леви. Здесь мы уделим главное внимание случаю невыполнения условий Леви; условия на главные символы при этом сильнее, чем в ([1]).

1. Обозначения:

$$x=(x_0,\ x')=(x_0,\ \ldots,\ x_l)\in X=\mathbf{R}\times X'=\mathbf{R}^{l+1},$$

$\xi=(\xi_0,\ \xi')=(\xi_0,\ \ldots,\ \xi_l)$ — двойственные переменные,

$$\langle x,\ \xi\rangle=x_0\xi_0+\ \ldots+x_l\xi_l;$$

T^*X, T^*X' — кокасательные расслоения,

$$T^*X\setminus 0=\{(x,\ \xi)\in T^*X,\ \xi\neq 0\},\quad \dot{T}^*X=\{(x,\ \xi)\in T^*X,\ \xi'\neq 0\}.$$

Если $z=(x,\ \xi)$, $\tilde{z}=(\tilde{x},\ \tilde{\xi})$, то $\sigma(z,\ \tilde{z})=\langle x,\ \tilde{\xi}\rangle-\langle\tilde{x},\ \xi\rangle$.

Через $L^m(X')$, $L^m(X)$ обозначим пространства классических псевдодифференциальных операторов порядка m с компактными носителями, $L^{m'}(X)=C^\infty(\mathbf{R},\ L^m(X'))$.

Пусть $u\in\mathcal{D}'(X)$, тогда $\mathrm{WF}(u)$ называется следующее подмножество $T^*X\setminus 0$: $z\notin\mathrm{WF}(u)$, если существует $a\in L^0(X)$, $a_0(z)\neq 0$, $au\in C^\infty(X)$. Если T -- оператор с ядром $K(x,\ y)\in\mathcal{D}'(X\times X)$, то ([2-4])

$$\mathrm{WF}(T)=\{(x,\ \xi,\ y,\ \eta)\in T^*(X\times X),\ (x,\ \xi,\ y,\ -\eta)\in\mathrm{WF}(K)\}.$$

2. Будем изучать оператор $P\equiv -D_0^2+Q$, где $Q\in L^{2'}(X)$, причем

(H) $Q_2(x,\ \xi')\geqslant 0$.

Введем множества

$$\mathrm{Char}\,P=\{(x,\ \xi)\in\dot{T}^*X,\ P_2(x,\ \xi)=0\},$$

$$\Sigma=\{(x,\ \xi)\in\mathrm{Char}\,P,\ \nabla P_2(x,\ \xi)=0\}=\{(x,\ \xi)\in T^*X,\ \xi_0=Q_2(x,\ \xi')=0\},$$

где $\nabla f=\mathrm{grad}_{\xi,\ -x}f$.

В точках Σ введем фундаментальную матрицу ([5])

$$F(x,\xi)=\begin{pmatrix} P_{2,\xi x} & P_{2,\xi\xi} \\ -P_{2,xx} & -P_{2,x\xi}\end{pmatrix}(x,\xi)$$

и субглавный символ

$$P_1'(x,\xi)=P_1(x,\xi)+\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{l}P_{2,x_j\xi_j}(x,\xi).$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\Sigma=\mathbf{R}\times\Sigma'=\{(x,\ \xi),\ x_0\in\mathbf{R},\ (x',\ \xi')\in\Sigma'\},\tag{1}$$

где $T^*X'\supset\Sigma'$ — бесконечно гладкое многообразие.

$$c^{-1}d_\Sigma{}^2(x',\ \xi')\leqslant Q_2(x,\ \xi')\,|\xi'|^{-2}\leqslant c d_\Sigma{}^2(x',\ \xi'),\tag{2}$$

где $d_\Sigma(x',\ \xi')$ — расстояние от $(x',\ \xi'|\xi'|^{-1})$ до Σ'.

Можно показать, что если выполнены (H), (1), то бихарактеристики P, лежащие в $\operatorname{Char}P\setminus\Sigma$, не имеют предельных точек из Σ. Поэтому нас должны интересовать WF решений лишь в пересечении с Σ.

Можно показать, что $\operatorname{Ker}F^2\cap\operatorname{Im}F^2=\{0\}$ в точках Σ.

Пусть $\pi(x,\ \xi)$ и $I-\pi(x,\ \xi)$ — проекторы соответственно на $\operatorname{Ker}F^2(x,\ \xi)$ и $\operatorname{Im}F^2(x,\ \xi)$.

3. Сформулируем два утверждения, которые были сформулированы в [1] при значительно более общих предположениях.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (H), (1), (2) *и условия на младшие члены*:

(L1) $\operatorname{Im}P_1'=0$ *на* Σ;

(L2) $\operatorname{Re}P_1'>-{}^1/_2\sum_k\omega_k>0$ *на* Σ,

где $\pm\omega_k i$ *— собственные числа* F, $\omega_k>0$.

Пусть $\varphi(x,\ \xi)\in C^\infty(\dot T^*X)$ *— вещественная положительно однородная степени* 0 *по* ξ *функция. Предположим, что*:

$$\varphi_{x_0}(x,\ \xi)>0,\quad \sigma(F\pi\nabla\varphi,\ \pi\nabla\varphi)(x,\ \xi)<0$$
$$\text{при } (x,\ \xi)\in\Sigma,\quad x_0\in[T_-,\ T_+],\quad \varphi(x,\ \xi)=0;\tag{3}$$

$$\varphi(x,\ \xi)>0 \text{ при } |x'|>R,\quad x_0\in[T_-,\ T_+].\tag{4}$$

Тогда, если $u\in\mathscr{D}'(X)$,

$$\mathrm{WF}(u)\cap\Sigma\cap\{\varphi(x,\ \xi)<0\}\cap\{x_0=T_-\}=\emptyset,$$
$$\mathrm{WF}(Pu)\cap\Sigma\cap\{\varphi(x,\ \xi)<0\}\cap\{T_-\leqslant x_0\leqslant T_+\}=\emptyset,$$

то

$$\mathrm{WF}(u)\cap\Sigma\cap\{\varphi(x,\ \xi)<0\}\cap\{T_-\leqslant x_0\leqslant T_+\}=\emptyset.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (H)—(L2). *Предположим, что в каждой точке* $(x,\ \xi)\in\Sigma$

$$\dim(F\pi L)(x,\ \xi)=1,$$

где $L(x,\ \xi)=\{\zeta\in\mathbf{R}^{2l+2},\ \sigma(\zeta,\ (0,\ \xi))=0\}$.

Пусть $\gamma(\bar z)$ *— бихарактеристика* P, *проходящая через* $\bar z=(\bar x,\bar\xi)$, *если* $\bar z\in\operatorname{Char}P\setminus\Sigma$, *и* $\gamma(\bar z)$ *— бихарактеристика* D_0, *проходящая через* $\bar z$, *если* $\bar z\in\Sigma$;

$$\bar\gamma^{\pm}(\bar z)=\{(x,\ \xi)=z\in\gamma(\bar z),\ \pm x_0\geqslant\pm\bar x_0\}.$$

Тогда:

(i) *Если* $\dot T^*X\supset W$ *— открытое коническое по* ξ *ограниченное по* x *множество, то существуют* $E_\pm$ *— правые параметриксы* P *в* W *такие, что*

$$\mathrm{WF}(PE_\pm-I)\cap W\times T^*X=\emptyset,\tag{5}$$

$$\mathrm{WF}(E_\pm)\subset\operatorname{diag}(\dot T^*X\times\dot T^*X)\cup\{(z,\ \bar z)\in\operatorname{Char}P\times\operatorname{Char}P,\ z\in\gamma^{\pm}(\bar z)\},\tag{6}$$

где $\operatorname{diag}M\times M=\{(z,z),\ z\in M\}\subset M\times M$.

(ii) $\mathrm{WF}(u)\cap\Sigma$ *инвариантен относительно переноса вдоль не пересекающихся с* $\mathrm{WF}(Pu)$ *отрезков бихарактеристик* D_0.

(iii). Если $\Sigma \supset \gamma$ — *бихарактеристика* D_0, *то существует* $u \in \mathcal{D}'(X)$ *такая, что*

$$Pu \in C^\infty(X), \quad \mathrm{WF}(u) = \gamma_c,$$

где $M_c = \{(x, \lambda\xi),\ (x, \xi) \in M,\ \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda > 0\}$.

4. Изложим результаты, относящиеся к случаю, когда в каждой точке Σ условие (L1) заменено на противоположное. Наложим дополнительные ограничения на P_2:

$$\operatorname{rank}(F\pi)(x, \xi) = r+1 = \text{const на } \Sigma; \tag{7}$$

$$(0, \xi) \notin \operatorname{Im} F(x, \xi) \text{ при } (x, \xi) \in \Sigma. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (H), (1), (2), (7), (8) *и условие на младшие члены*

(L1)′ $|\operatorname{Im} P_1'| > 0$ *на* Σ.

Пусть $\varphi(x, \xi) \in C^\infty(\dot{T}^*X)$ *положительно однородна степени* 0 *по* ξ *и удовлетворяет* (3), (4).

Тогда имеет место утверждение теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, $\dim \Sigma \leqslant 2l$ *и* $r = 0$.

Тогда имеют место утверждения (ii), (iii) *теоремы* 2.

Замечание. В этом случае автору ничего не известно относительно существования параметриксов с направленным распространением WF.

Замечание. Если $\dim \Sigma = 2l+1$ и выполнены условия теоремы 3, то P микролокально гипоэллиптичен ([6]).

5. Если мы захотим сохранить условие (L1), но ослабить условие (L_2), то, как показывает приводимый ниже пример, нам надо положить дополнительные ограничения на P_2.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (H), (1), (2), (7), (8), $r = 0$, $\dim \Sigma = 2p+1 < 2l$ *и условия на младшие члены* (L1), *а также*

$$(\mathrm{L2})' \qquad \left(\operatorname{Re} P_1' + \sum_{k=1}^{p} \omega_k(\alpha_k + {}^1/_2)\right) \quad (x, \xi) \neq 0,$$

каковы бы ни были $(x, \xi) \in \Sigma$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ — *набор целых неотрицательных чисел.*

Тогда имеют место утверждения теоремы 2.

Замечание. Из (H), (1), (2), (7), $r = 0$ вытекает (8) и что $\dim \Sigma$ — нечетное число.

Замечание. Если $p = l$, выполнены (H), (1), (2), (L1) и $P_1'(x, \xi) < 0$, то P микролокально гипоэллиптичен ([6]).

6. Пример. Пусть

$$P \equiv -D_0^2 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 (D_j^2 + x_j^2 \lambda_j(D)) + \sum_{j=p+1}^{p+q} D_j^2 + kD_l,$$

где $\alpha_j > 0$, $q > 0$, $p > 0$, $p+q < l$,

$$\lambda(D) = \sum_{j=p+q+1}^{l} D_j^2,\ k \in \mathbf{R}.$$

Очевидно, что (H), (1), (2), (7), (8), (L1) выполнены,

$$\Sigma = \{x_1 = \ldots = x_p = \xi_0 = \ldots = \xi_{p+q} = 0,\ \lambda(\xi) > 0\}.$$

Пусть Σ_1 — множество точек из Σ, в которых не выполнено (L2); тогда

$$\Sigma_1=\{(x,\ \xi)\in\Sigma,\ \xi_l\lambda^{-1/2}(\xi)\,k'\leqslant -1\},$$

где

$$k'=k\left(\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{\,2}\right)^{-1}.$$

Введем $\mathfrak{M}_1$ — множество содержащихся в Σ_1 прямых вида

$$\gamma=\{(x,\ \xi),\ \xi=\xi,\ x'=\bar{x}'+\bar{v}x_0\},$$

где $\{\xi, \bar{x}', \bar{v}\}=\text{const}$, $\bar{v}=(0,\ldots,0,\bar{v}_{p+1},\ldots,\bar{v}_{p+q},0,\ldots,0)$.

Теорема 6. *Пусть P — описанный выше оператор.*

Тогда, если $|k|>1$, то для любой $\gamma\in\mathfrak{M}_1$ существует $u\in\mathcal{D}'(X)$, $Pu\in C^\infty(X)$, $\mathrm{WF}(u)=\gamma_c$.

Поступило
28 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Я. Иврий*, ДАН, т. 226, № 6 (1976). [2] *L. Hörmander*, Acta math., v. 127, № 1–2, 79 (1971). [3] *J. J. Duistermaat, L. Hörmander*, Acta math., v. 128, № 3–4, 183 (1972). [4] *Л. Хёрмандер*, УМН, т. 28, № 6, 106 (1973). [5] *В. Я. Иврий, В. М. Петков*, УМН, т. 29, № 5, 3 (1974). [6] *L. Hörmander*, Math. Ann., v. 217, 165 (1975).