Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 2

УДК 534.213

ФИЗИКА

Е. В. ИМЕНИТОВА, К. В. ЧЕРНЫШЕВ, В. В. ШЕГАЙ

О РАСЧЕТЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

(Представлено академиком Р. В. Хохловым 3 III 1976)

Задача о свободных колебаниях упругого однородного изотропного цилиндра конечной длины формулируется так: для точек внутри цилиндра нужно найти решение уравнения

$$(\lambda+2\mu)\cdot\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{U})-\mu\cdot\nabla\times(\nabla\times\mathbf{U})+\omega^2\rho\mathbf{U}=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее на граничной поверхности условиям

$$T_{rr}=T_{rz}=T_{r\theta}=0 \quad \text{при} \quad r=R, \qquad (2)$$

$$T_{zz}=T_{rz}=T_{z\theta}=0 \quad \text{при} \quad z=\pm H, \qquad (3)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)=\mathbf{U}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ — вектор смещения частиц среды в цилиндре; T_{ik} — компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах; λ, μ — упругие постоянные Ламе; ρ — плотность среды; R — радиус цилиндра, H — половина его длины. Те значения параметра $\omega=\omega_k$, при которых поставленная задача имеет нетривиальное решение, являются собственными частотами, а соответствующие значения вектора $\mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{r})$ — собственными функциями свободных колебаний цилиндра.

Если выполняется только одно из граничных условий: или (2), или (3), то полученные решения представляют нормальные волны с непрерывным частотным спектром, распространяющиеся соответственно в бесконечном цилиндре или безграничной пластине со свободной от напряжений поверхностью. Функции $\{\mathbf{U}_n(\mathbf{r})\}$, описывающие эти волны, образуют бесконечномерную и в общем случае линейно независимую систему. В предположении полноты этой системы можно искать решение задачи о свободных колебаниях цилиндра конечной длины в виде разложения в ряд по этим функциям:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\mathbf{U}_n(\mathbf{r}), \qquad (4)$$

где коэффициенты $\{A_n\}$ выбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям на дополнительных поверхностях.

В дальнейшем будем использовать систему функций, точно удовлетворяющих уравнению (1) и граничным условиям (3), т. е. соответствующих нормальным волнам в безграничной пластине. В этом случае дополнительной поверхностью является боковая поверхность цилиндра. Рассмотрим граничные условия (2) на этой поверхности.

Сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, действующая на единичную площадку, перпендикулярную радиусу цилиндра, с учетом (4) может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\mathbf{F}_n(\mathbf{r}), \qquad (5)$$

где $\mathbf{F}_n(\mathbf{r})$ — сила, соответствующая смещению $\mathbf{U}_n(\mathbf{r})$. Компонентами вектора $\mathbf{F}_n(\mathbf{r})$ являются T_{rrn}, T_{rzn}, $T_{r\theta n}$. Граничные условия (2) можно теперь представить в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=0 \quad \text{при} \quad r=R. \tag{6}$$

Подставив выражение (5) в уравнение (6), найдем, что при $\omega=\omega_k$ система векторов $\{\mathbf{F}_n\}$ является линейно зависимой на боковой поверхности цилиндра. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости является равенство нулю определителя Грама системы векторов $\{\mathbf{F}_n\}$ [1]:

$$\Gamma(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n, \ldots) = \det \begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nk} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Здесь $F_{nk}=\int_{-H}^{+H}\int_{0}^{2\pi} F_n \cdot \mathbf{F}_k^* \, d\theta \, dz$. Решение уравнения $\Gamma(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n, \ldots)=0$ при $r=R$ относительно параметра ω определяет полный спектр $\{\omega_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, собственных частот свободных колебаний цилиндра конечной длины. Вычисление коэффициентов $\{A_n\}$ сводится, таким образом, к решению бесконечной системы однородных уравнений, определителем которой является определитель Грама ([7]). Собственные функции задачи о свободных колебаниях цилиндра конечной длины записываются в виде рядов:

$$\mathbf{U}^{(k)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} \, \mathbf{U}_n(\mathbf{r}, \omega_k), \quad k=1, 2, \ldots \tag{8}$$

В численных расчетах приходится ограничиваться конечным числом членов в рядах (4), (5). Пусть это число равно N. Можно показать, что имеет место соотношение

$$I_N = \int_{-H}^{+H}\int_{0}^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{N} A_n \mathbf{F}_n \right) \left(\sum_{k=1}^{N} A_k \mathbf{F}_k \right)^* d\theta \, dz = |A_N|^2 \frac{\Gamma(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N)}{\Gamma(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_{N-1})}. \tag{9}$$

Величина I_N с точностью до постоянного множителя определяет средний квадрат модуля силы $F^{(N)}(r)$, вычисленной через N первых векторов $\{\mathbf{U}_n(\mathbf{r})\}$, и при $r=R$ является функцией только параметра ω. Локальные минимумы функции $I_N(\omega)$ соответствуют минимумам модуля силы $\mathbf{F}^{(N)}$ при $r=R$. Поэтому можно считать, что минимумам $I_N(\omega)$ отвечают приближенные значения собственных частот. Увеличение числа членов позволяет вычислять собственные частоты с любой степенью точности.

С целью проверки изложенного метода решения задачи о свободных колебаниях цилиндра конечной длины был проведен расчет частного случая осесимметричных изгибных колебаний круглых дисков для $N=1, 2$. Тогда компоненты векторов $\{\mathbf{U}_n\}$, нормированные на H, и компоненты векторов $\{\mathbf{F}_n\}$, нормированные на μ, имеют вид

$$U_{rn} = -J_1(\alpha_n r) \left(\alpha_n \sin \delta_n z + \frac{\beta_n^2 - \alpha_n^2}{2\alpha_n} \frac{\sin \delta_n}{\sin \beta_n} \sin \beta_n z \right),$$

$$U_{zn} = J_0(\alpha_n r) \left(\delta_n \cos \delta_n z - \frac{\beta_n^2 - \alpha_n^2}{2\beta_n} \frac{\sin \delta_n}{\sin \beta_n} \cos \beta_n z \right),$$

$$T_{rrn} = \left\{ (2\delta_n^2 - \Omega^2) J_0(\alpha_n r) + \frac{2\alpha_n}{r} J_1(\alpha_n r) \right\} \sin \delta_n z + \ldots\ldots$$

$$+(\beta_n^2-\alpha_n^2)\left\{-J_0(\alpha_n r)+\frac{1}{\alpha_n r}J_1(\alpha_n r)\right\}\frac{\sin\delta_n}{\sin\beta_n}\sin\beta_n z, \qquad (10)$$

$$T_{rzn}=-2\alpha_n\delta_n J_1(\alpha_n r)\left(\cos\delta_n z-\frac{\cos\delta_n}{\cos\beta_n}\cos\beta_n z\right),$$

$$U_{\theta n}=0, \quad T_{r\theta n}=0, \quad n=1, 2.$$

Здесь $J_0(\alpha_n r)$, $J_1(\alpha_n r)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка: $\Omega=\omega H/(\mu/\rho)^{1/2}$ — безразмерная частота; α_n, β_n, δ_n — безразмерные волно-

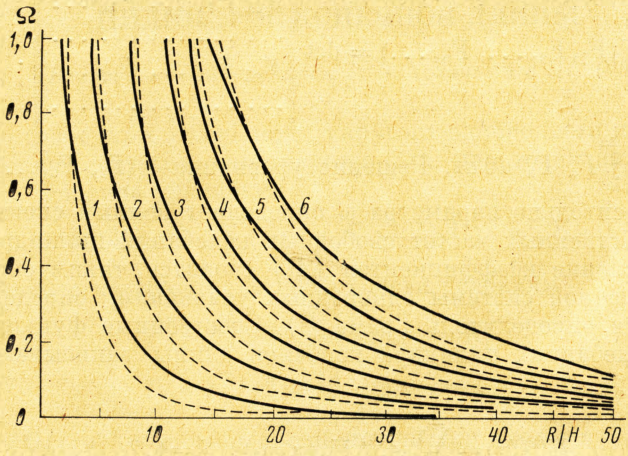


Рис. 1. Зависимость собственных частот изгибных колебаний круглых дисков от отношения R/H для первых шести резонансных частот; сплошные кривые — точная теория, штриховые — классическая теория

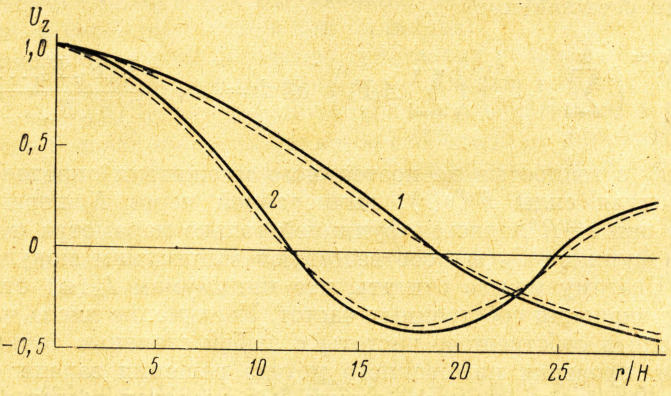


Рис. 2. Распределение смещения U_z в средней плоскости диска в зависимости от радиуса r для 1-й и 2-й мод колебаний при $R/H=30$; сплошные кривые — точная теория, штриховые — классическая теория

вые числа, связанные с Ω соотношениями $\alpha_n^2+\beta_n^2=\Omega^2$, $\alpha_n^2+\delta_n^2=\Omega^2(1-2\nu)/(2-2\nu)$ (ν — коэффициент Пуассона) и удовлетворяющие дисперсионному уравнению Рэлея — Лэмба для изгибных волн в безграничной пластине [2]:

$$\operatorname{tg}\delta/\operatorname{tg}\beta=4\alpha^2\beta\delta/(\beta^2-\alpha^2)^2. \qquad (11)$$

Текущие координаты r и z нормированы на H.

В расчетах были использованы действительный и мнимый корни уравнения (11), вычисленные в работе [3]. Такое представление имеет ана-

логию в классическом решении задачи об изгибных колебаниях тонких круглых пластин ([4]). Результаты численных расчетов при $N=2$ приводятся на рис. 1, 2 ($\nu=0{,}3$).

На низких частотах ($\Omega \leqslant 0{,}6$) классическая теория дает заниженные значения собственных частот, тогда как распределение смещения U_{zn} определяется довольно точно. Последнее обстоятельство приводит к равенству волновых чисел, определяемых по точной и классической теории. Различия в собственных частотах, определяемых по этим теориям, связаны с несовпадением дисперсионных кривых (см. рис. 3). На очень низких частотах ($\Omega<0{,}04$) дисперсионные кривые близки друг к другу, и при вычислении первой собственной частоты по классической теории ошибка не превосходит 5%. Однако с повышением частоты эта ошибка возрастает, достигая максимального значения при $\Omega=0{,}4$. Пересечение дисперсионных кривых при $\Omega\approx 0{,}6$ означает, что пластина с собственными частотами, близкими к $\Omega\approx 0{,}6$, с хорошей точностью подчиняется классической теории. Более высокие частоты лежат ниже значений, вычисляемых по классической теории.

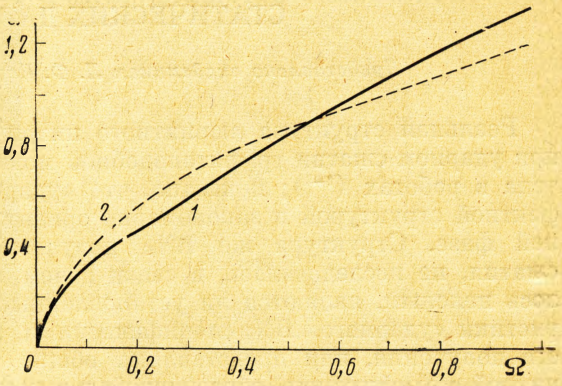


Рис. 3. Зависимость действительных волновых чисел от частоты для изгибных волн в пластине; *1* – точная теория, *2* – классическая теория

Для оценки степени удовлетворения нулевых граничных условий по напряжению на боковой поверхности вычислялось отношение найденных по точной теории компонент тензора напряжений T_{rr} и T_{rz} при $r=R$ к максимальному значению этих величин внутри диска. Эти отношения при $\Omega<0{,}2$ не превышали 0,01% для T_{rz} и 2% для T_{rr}. Следует, однако, иметь в виду, что при расчетах более высоких собственных частот по точной теории возникает необходимость использовать большее число членов в рядах (4), (5), т. е. учесть другие корни дисперсионного уравнения (11).

В заключение авторы благодарят С. Н. Ржевкина за внимание, проявленное к этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, М., «Наука», 1967. [2] *H. Lamb*, Proc. Roy. Soc. A, v. 93, 114 (1917). [3] *D. S. Potter, C. D. Leedham*, J. Acoust. Soc. Am., v. 41, 1, 148 (1967). [4] *Рэлей*, Теория звука, М., ГИТТЛ, 1955.