Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 2

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Г. А. ИСАЕВ

К МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 23 III 1976)

1. Последние годы в теории линейных операторов наблюдается тенденция к изучению задач на собственные значения с многими параметрами. Это отчасти стимулируется некоторыми вопросами математической физики, которые приводят к рассмотрению спектральных задач для совместных операторов, зависящих от нескольких параметров (см., например, ([1], [2])). При этом более важным и естественным является случай совпадения числа уравнений и параметров.

Рассмотрим оператор-функции вида

$$P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = A_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_{jk}, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

здесь A_j, $B_{j1}, \ldots, B_{jn}$ — линейные операторы, определенные в банаховых пространствах $\mathscr{B}_j$ и принимающие значения в банаховых пространствах $\mathscr{B}_j'$ соответственно ($j=1, 2, \ldots, n$), а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — спектральные параметры. Каждое уравнение вида $P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x_j = y_j$ содержит все параметры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и определено в соответствующей паре пространств $\mathscr{B}_j$, $\mathscr{B}_j'$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Возникает естественное желание провести «разделение спектральных параметров», т. е. установить эквивалентность исходной задачи задаче для системы из n операторов, зависящих только от одного параметра и определенных в одном и том же пространстве. Для таких абстрактно заданных уравнений аналогичная задача в конечномерных линейных пространствах подробно исследована в серии работ Ф. В. Аткинсона (см., например, ([3], [4])), а случай ограниченных самосопряженных операторов, действующих в сепарабельных гильбертовых пространствах, изучен в работе П. Дж. Брауна ([5]).

В настоящей заметке задача о «разделении спектральных параметров» изучается в максимально общей постановке, при этом многие результаты являются новыми даже в случае конечномерных пространств. Вводятся некоторые объекты многопараметрической спектральной теории, устанавливается связь между соответствующими объектами до и после «разделения», причем для разделения привлекаются простейшие операторные пучки.

2. Пусть $[\mathscr{B}_j \to \mathscr{B}_j']$ — множество всех линейных ограниченных операторов, определенных на $\mathscr{B}_j$ и принимающих значения в $\mathscr{B}_j'$. Допустим, что $\mathscr{B}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_n$ — алгебраическое тензорное произведение пространств $\mathscr{B}_j$, $j=1, 2, \ldots, n$, и α — произвольная равномерная кросс-норма (например, кросс-норма, порождающая проективную или индуктивную топологию). В дальнейшем $\mathscr{B}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_n$ будет означать пополнение алгебраического тензорного произведения по произвольной равномерной кросс-норме α (см. ([6], [7]))

Пусть $P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — замкнутые операторы с всюду плотными областями определения $\mathscr{D}(P_j) \subset \mathscr{B}_j$.

Определение 1. Точка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ называется собственным значением многопараметрической задачи (совместных оператор-функций $P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $j=1, 2, \ldots, n$), если существуют ненулевые элементы $x_j \in \ker P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Собственным элементом многопараметрической задачи, соответствующим собственному значению $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, называется разложимый тензор $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{D}(P_j)$. Множество собственных значений обозначим через $\sigma_p[P_1, \ldots, P_n]$.

Определение 2. Спектром многопараметрической задачи называется множество

$$\sigma[P_1, \ldots, P_n] = \bigcap_{j=1}^{n} \{(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbf{C}^n: P_j^{-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \notin [\mathscr{B}_j' \to \mathscr{B}_j]\}.$$

Определение 3. Числовой областью многопараметрической задачи назовем множество

$$W[P_1, \ldots, P_n] = \bigcap_{j=1}^{n} \bigcup_{0 \neq x_j \in \mathscr{D}(P_j)} \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n: (P_j(\lambda) x_j, x_j)_j = 0\}.$$

Замечание 1. Для простоты договоримся, что когда речь идет о числовой области, то $\mathscr{B}_j = \mathscr{B}_j' = \mathscr{H}_j$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_j$. Можно было бы ввести понятие числовой области для произвольных банаховых пространств, но здесь не будем делать этого.

Теперь введем те операторы, которые возникнут при «разделении спектральных параметров». Каждому оператору T_j: $\mathscr{D}(T_j) \subset \mathscr{B}_j \to \mathscr{B}_j'$ сопоставим оператор

$$T_j^t = I_1 \otimes \ldots \otimes I_{j-1} \otimes T_j \otimes I_{j+1} \otimes \ldots \otimes I_n$$

и рассмотрим операторы

$$\Delta_j: \bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{D}(P_j) \subset \bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{B}_j \to \bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{B}_j',$$

определенные по формулам (примем соглашение $B_{j0}{}^t = A_j^t$)

$$\Delta_j = (-1)^j \det B_{jk}{}^t; \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad k \neq j,$$

т. е. для разложимых тензоров $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{D}(P_j)$

$$\Delta_j x = (-1)^j \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma B_{1\sigma(1)} x_1 \otimes \ldots \otimes B_{n\sigma(n)} x_n,$$

где $\sigma = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$ — множество всех перестановок из чисел $0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$; $\varepsilon_\sigma = 1$ или $\varepsilon_\sigma = -1$ в зависимости от четности и нечетности перестановки σ; I_j — тождественные операторы в $\mathscr{B}_j$.

3. Многопараметрическая спектральная задача сводится к исследованию линейных операторных пучков $\Delta_j - \lambda_j \Delta_0$, $j=1, 2, \ldots, n$. Дадим точные формулировки.

Теорема 1. *Пусть* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \sigma_p[P_1, \ldots, P_n]$.

Тогда $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *является совместным собственным значением пучков* $\Delta_j - \lambda_j \Delta_0$, *отвечающих общему разложимому собственному вектору* $x \in \bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{D}(P_j)$, *т. е.*

$$(\Delta_j - \lambda_j \Delta_0) x = 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Пусть* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in W[P_1, \ldots, P_n]$.

Тогда $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *принадлежит совместной числовой области пучков* $\Delta_j - \lambda_j \Delta_0$ *на разложимом отличном от нуля тензоре* $x_j \in \overset{n-}{\underset{j=1}{\otimes}} \mathscr{D}(P_j)$, *т. е.*

$$(\Delta_j x, x) = \lambda_j (\Delta_0 x, x), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти предложения полезны для нахождения необходимых условий на $\sigma_p[P_1, \ldots, P_n]$ и $W[P_1, \ldots, P_n]$. В их доказательстве, так же как и в доказательстве последующих предложений, существенно используются некоторые свойства «точности функторов тензорного умножения на категории банаховых пространств и их линейных отображений».

При некоторых условиях имеют место и обратные предложения. Эти условия включают в себя условия «независимости» оператор-функций $P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, что естественно для построения «правильной» многопараметрической спектральной теории.

Теорема 3. *Пусть* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *принадлежит совместной числовой области пучков* $\Delta_j - \lambda_j \Delta_0$ *на разложимом отличным от нуля тензоре* x. *Допустим, что* $(\Delta_0 x, x) \neq 0$.

Тогда $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in W[P_1, \ldots, P_n]$.

Определение 4. Скажем, что выполняется условие (R) для многопараметрической спектральной задачи, если для всех $x \in \overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} \mathscr{D}(P_j)$ найдутся элементы $x^1, \ldots, x^n$ такие, что

$$A_j^t x + \sum_{k=1}^{n} B_{jk}^t x^k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Условие (R) выполняется, например, в конечномерном случае. Имеет место также следующее предложение, которое является абстрактным аналогом случая дифференциальных операторов с многими спектральными параметрами.

Теорема 4. *Пусть* $B_{j1}, \ldots, B_{jn}$ *— ограниченные попарно перестановочные операторы,* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда выполняется условие (R) *для многопараметрической задачи.*

Теперь можем сформулировать обратное предложение к теореме 1:

Теорема 5. *Пусть выполняется условие* (R) *и* $\ker \Delta_0 = \{0\}$.

Тогда каждое совместное собственное значение пучков $\Delta_j - \lambda_j \Delta_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *принадлежит* $\sigma_p[P_1, \ldots, P_n]$.

Замечание 2. Во всех теоремах 1–5 не предполагалось никаких условий типа самосопряженности. Задача об эквивалентности изучения $\sigma[P_1, \ldots, P_n]$ и совместного спектра пучков $\Delta_j - \lambda_j \Delta_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тоже исследована нами в общем случае. Однако она несколько громоздка и ей будет посвящена отдельная работа. При некоторых условиях типа ограниченности и самосопряженности некоторых операторов эта задача сильно упрощается.

В конце отметим, что можно исследовать также следующую однородную многопараметрическую спектральную задачу:

$$P_j(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_0 A_j + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_{jk}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда спектр $\sigma[P_1, \ldots, P_n]$ и связанные с ним другие характеристики следует считать подмножествами комплексного проективного пространства CP^n.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *F. V. Atkinson,* Bull. Am. Math. Soc., v. 74 (1968). [2] *F. M. Arscott*, Proc. London Math. Soc., Ser. 3, v. 14, № 55 (1964). [3] *F. V. Atkinson*, Technical Summary Report, № 431, 1964. [4] *F. V. Atkinson*, Multiparameter Eigenvalue Problems, v. 1, Matrices, N.Y., 1972. [5] *P. J. Browne*, Indiana Univ. Math. J., v. 24, 3 (1974). [6] *R. Schatten,* Ann. Math. Studies, № 26, Princeton (1950). [7] *A. Grothendieck,* Memoirs Am. Math. Soc., № 16 (1955).