Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

Математика

УДК 517.983.23:517.983.5

Применение $Q[a,b]$-исчисления к решению некоторых операторных уравнений

А.А. Атвиновский

Предложены теоремы, позволяющие разрешать уравнения, содержащие функции М.Г. Крейна от замкнутых операторов, спектр которых не пересекается с данным отрезком. Рассмотрен пример.
Ключевые слова: класс Крейна, функциональное исчисление, замкнутый оператор, операторное уравнение.

The theorems that allow us to solve equations with M.G. Kreins functions of closed operators whose spectrum doesn't meet the given segment are given in the article. The example is shown.
Keywords: Krein class, functional calculus, closed operator, operator equation.

В статье рассмотрен класс функций $R[a,b]$, введенный М.Г. Крейном [1], и класс замкнутых неограниченных операторов в банаховом пространстве X, спектр которых не пересекается с отрезком $[a,b]$. В работе [2] были предложены теоремы, позволяющие разрешать операторные уравнения, содержащие функции М.Г. Крейна от этих операторов, с помощью введенного там функционального исчисления ($Q[a,b]$-исчисления). Целью работы является расширение круга таких теорем и рассмотрение соответствующего примера.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о функциях классов Неванлинны R и Крейна $R[a,b]$ [1].

Говорят, что функция f принадлежит классу R, если она голоморфна в открытой верхней полуплоскости и отображает её в себя.

Пусть $a<b$. Будем говорить, что функция g относится к классу $R[a,b]$, если она принадлежит R и голоморфна и положительна на $(-\infty,a)$ и голоморфна и отрицательна на $(b,+\infty)$. При этом g можно единственным образом представить в виде

$$g(z)=\int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}, \tag{1}$$

где τ – ограниченная неубывающая функция, отличная от постоянной [1, с. 525–526].

Всюду далее A будет обозначать замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с отрезком $[a,b]$.

Определение 1.1 *Для функции g класса $R[a,b]$ с интегральным представлением (1) положим*

$$g(A)=\int_a^b R(t,A)d\tau(t),$$

где $R(t,A)=(tI-A)^{-1}$ – резольвента оператора A.

Для решения задачи об обратимости оператора $g(A)$ рассмотрим класс функций $Q[a,b]$.

Определение 2 2. *Пусть $a<b$. Положим*

$$Q[a,b]=\{\phi \mid \phi(z)=1/g(z),\ g\in R[a,b]\}.$$

Известно [2], что $\varphi(z)$ можно единственным образом представить в виде

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z - h(z), \tag{2}$$

где $h \in R[a,b]$, интегралы, представляющие $h(a)$ и $h(b)$ по формуле (1), сходятся, а числа α и β удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \alpha + \beta a - h(a) & \geq & 0 \\ \alpha + \beta b - h(b) & \leq & 0 \\ \beta & < & 0, \end{cases}$$

причем

$$\beta = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}, \alpha = \lim_{x\to\infty} (\varphi(x) - \beta x). \tag{3}$$

Определение 3.3 [2] *Для функции $\varphi \in Q[a,b]$ вида (2) положим*

$$\phi(A) = \alpha I + \beta A - h(A),$$

($D(\varphi(A)) = D(A)$), где $h(A)$ понимается в смысле определения 1. Данное функциональное исчисление будем называть $Q[a,b]$-исчислением.

Роль $Q[a,b]$-исчисления видна из следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любой функции $g \in R[a,b]$ оператор $g(A)$ обратим, причем*

$$g(A)^{-1} = \varphi(A),$$

где $\varphi(z) = 1/g(z)$ и правая часть понимается в смысле $Q[a,b]$-исчисления.

Следствие 1.4 *Пусть $\varphi \in Q[a,b]$, $g(z) = 1/\varphi(z)$. Тогда оператор $\varphi(A)$ ограниченно обратим, и его обратный можно вычислить по формуле*

$$\varphi(A)^{-1} = g(A),$$

где правая часть понимается в смысле $R[a,b]$-исчисления.

Теорема 1 означает, что уравнение

$$g(A)x = y$$

имеет для любого $y \in D(A)$ единственное решение $x = \varphi(A)y$, где $\varphi = 1/g \in Q[a,b]$ и правая часть понимается в смысле $Q[a,b]$-исчисления. При этом важно отметить, что, как и в работе [4], оператор $\varphi(A)$ можно вычислить с помощью формул обращения интегрального преобразования Стилтьеса. Аналогичное замечание можно сделать и по поводу следствия 1. Приведем две теоремы, служащие иллюстрацией этого тезиса. В первой из них рассматривается уравнение $\ln((A - dI)(A - cI)^{-1})x = y$.

Теорема 2. *Пусть $0 \leq a \leq c < d \leq b$. Для замкнутого оператора A в банаховом пространстве X, спектр которого не пересекается с отрезком $[a,b]$, уравнение*

$$\int_c^d R(t,A)x\,dt = y$$

для любого $y \in D(A)$ имеет единственное решение

$$x = \frac{d+c}{2(d-c)} y - \frac{1}{d-c} Ay - \int_c^d \frac{R(\lambda, A)y}{\ln^2 \frac{d-\lambda}{\lambda - c} + \pi^2} d\lambda.$$

Проиллюстрируем предыдущую теорему следующим примером.

Пример 1. Пусть $\Delta = d^2/dt^2$ – оператор двукратного дифференцирования в пространстве $L^p(\mathsf{R}), 1 \leq p < \infty$ с областью определения $D(\Delta) = W^{2,p}(\mathsf{R})$ (пространство Соболева). Известно (см., например, [5, с. 235]), что его спектр не пересекается с $(0,\infty)$, причем при $\lambda > 0$ его резольвента суть

$$R(\lambda, \Delta)u = v_\lambda * u, u \in L^p(\mathsf{R}), \tag{4}$$

где

$$v_\lambda(t)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|t|}, \tag{5}$$

а звездочка обозначает свертку функций:

$$f*g(s)=\int_{\mathrm{R}} f(t)g(s-t)dt. \tag{6}$$

Так как

$$\int_c^d R(\lambda,\Delta)xd\lambda=\int_c^d\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|t|}x(s-t)dt\right)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}x(s-t)\left(\int_c^d\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|t|}d\lambda\right)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{c}|t|}-e^{-\sqrt{d}|t|}}{|t|}x(s-t)dt$$

(теорема Фубини применима, так как функция $\left(e^{-\sqrt{c}|t|}-e^{-\sqrt{d}|t|}\right)/|t|$ принадлежит $L^q(\mathrm{R})$), то уравнение

$$\int_c^d R(\lambda,\Delta)x(s)d\lambda=y(s)$$

имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{c}|t|}-e^{-\sqrt{d}|t|}}{|t|}x(s-t)dt=y(s).$$

В силу теоремы 2 для любого $y\in W^{2,p}(\mathrm{R})$ последнее уравнение имеет единственное решение в пространстве $L^p(\mathrm{R})$ $(1\le p<\infty)$, задаваемое равенством

$$x(s)=\frac{d+c}{2(d-c)}y(s)-\frac{1}{d-c}y''(s)-\int_c^d\frac{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{\lambda}|t|}y(s-t)dt}{2\sqrt{\lambda}(\ln^2\frac{d-\lambda}{\lambda-c}+\pi^2)}d\lambda. \tag{7}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем окончательно

$$x(s)=\frac{d+c}{2(d-c)}y(s)-\frac{1}{d-c}y''(s)-\int_{-\infty}^{\infty}k(t)y(s-t)dt,$$

где

$$k(t)=\int_c^d\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|t|}}{2\sqrt{\lambda}(\ln^2\frac{d-\lambda}{\lambda-c}+\pi^2)}d\lambda=\int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{d}}\frac{e^{-s|t|}}{\ln^2\frac{d-s^2}{s^2-c}+\pi^2}ds.$$

В заключение приведем теорему, которая фактически дает формулу для решения следующего уравнения с оператором A:

$$(d-c)x+A\ln((A-dI)(A-cI)^{-1})x=y\ (y\in D(A)).$$

Теорема 3.5 *Пусть* $0\le a\le c<d\le b$. *Для замкнутого оператора* A *в банаховом пространстве* X *, спектр которого не пересекается с отрезком* $[a,b]$, *уравнение*

$$\int_c^d tR(t,A)xdt=y$$

для любого $y\in D(A)$ имеет единственное решение

$$x=\frac{4d}{3(d^2-c^2)}y-\frac{2}{d^2-c^2}Ay-\int_c^d\frac{R(t,A)y}{(d-c+t\ln\frac{d-t}{t-c})^2+\pi^2}dt.$$

Доказательство. Из легко проверяемого равенства

$$(d-c)+z\ln\frac{z-d}{z-c}=\int_c^d\frac{tdt}{t-z}$$

следует, что функция $g(z)=(d-c)+z\ln(z-d)/(z-c)$, где $\ln$ обозначает главное значение логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, принадлежит классу $R[a,b]$ и имеет представляющую меру tdt. Стало быть, функция $\varphi(z)=1/(d-c+z\ln(z-d)/(z-c))$ принадлежит $Q[a,b]$, а исходное уравнение имеет вид $g(A)x=y$. Имея целью применить для его решения теорему 1, получим для φ представление (2). Найдём α и β из формул (3):

$$\beta=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(d-c+x\ln\dfrac{x-d}{x-c})}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{(c-d+tc)(t(d-c)+(c-d+tc)(t-t^2/2+o(t^2)))}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{2c(d-c)-(c-d)^2+4c(c-d)}=-\frac{2}{d^2-c^2}.$$

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{d-c+x\ln\dfrac{x-d}{x-c}}+\frac{2x}{d^2-c^2}\right)=$$

$$=\frac{2}{d^2-c^2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2+t(c-d+tc)(d-c)+(c-d+tc)^2(t-t^2/2+o(t^2))}{t(d-c)+(c-d+tc)(t-t^2/2+o(t^2))}=$$

$$=\frac{2}{d^2-c^2}\lim_{t\to 0}\frac{2(c-d)^2-6c(c-d)+6c^2}{-3(c-d)+6c}=\frac{4d}{3(d^2-c^2)}$$

(мы воспользовались заменой $t=-1+(x-d)/(x-c)$). Таким образом, $\beta=-2/(d^2-c^2),\alpha=(4d)/(3(d^2-c^2))$. Для получения интегрального представления функции h из (2) воспользуемся комплексной формулой обращения преобразования Стилтьеса (см., например, [6, с. 70, формула 264] или [7, с. 340, теорема 7b]). В нашем случае функция $h(z)=\alpha+\beta z-\varphi(z)$ принадлежит $R[a,b]$. Будем искать ее интегральное представление в виде

$$h(z)=\int_a^b\frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Тогда функция

$$F(\zeta):=h(-\zeta)=\int_a^b\frac{f(t)dt}{t+\zeta}$$

может рассматриваться как преобразование Стилтьеса функции f, сосредоточенной на отрезке $[a,b]$. Поэтому в соответствии с упомянутой формулой обращения

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}(F(-x-i0)-F(-x+i0))=\frac{1}{2\pi i}(h(x+i0)-h(x-i0))=\frac{1}{2\pi i}(\varphi(x-i0)-\varphi(x+i0)). \quad (8)$$

Заметим, что при $\mathrm{Re}(z)\in(c,d)$ для главного значения логарифма справедливо равенство $\ln(z-d)/(z-c)=\ln(z-d)-\ln(z-c)$. Следовательно,

$$\varphi(x\pm i0)=\frac{1}{d-c+(x\pm i0)(\ln((x-d)\pm i0)-\ln((x-c)\pm i0)}.$$

Воспользовавшись для вычисления правой части формулой $\ln(x\pm i0)=\ln|x|\pm i\pi\theta(-x)$, где θ – функция Хевисайда, имеем

$$\varphi(x\pm i0)=\frac{1}{d-c+(x\pm i0)(\ln(|x-d|/|x-c|)\pm i\pi\theta(-x+d)\pm i\pi\theta(-x+c))},$$

что после преобразований приобретает вид

$$\phi(x \pm i0) = \begin{cases} \dfrac{1}{d - c + x\ln\dfrac{x-d}{x-c}}, & \text{åñëè}\, x \in (-\infty, c) \cup (d, \infty); \\ \dfrac{1}{d - c + x(\ln\dfrac{d-x}{x-c} \pm i\pi)}, & \text{åñëè}\, x \in (c, d). \end{cases}$$

Подставляя это в (8), заключаем, что искомая функция f сосредоточена на интервале (c, d) и имеет на нем вид $f(x) = 1/((d - c + x\ln\dfrac{d-x}{x-c})^2 + \pi^2)$, а потому

$$\varphi(z) = \frac{d+c}{2(d-c)} - \frac{1}{d-c}z - \int_c^d \frac{dt}{\left(\left(d - c + t\ln\dfrac{d-t}{t-c}\right)^2 + \pi^2\right)(t-z)}$$

(после замены $x = \ln\dfrac{d-t}{t-c}$ эта формула может быть проверена также с помощью вычетов (см. [8, с. 230, формула (3.10)]). Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 1 и определением 3.

Благодарю профессора А.Р. Миротина, под руководством которого была выполнена эта работа.

Литература

1. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука, 1973. – 552 с.

2. Атвиновский, А.А. Об однозначной разрешимости одного класса операторных уравнений / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» : в 2-х т. Т. 1 : Математический анализ. – Минск : Ин-т матем. НАН Беларуси, 2012. – С. 28–32.

3. Атвиновский, А.А. Об интегральном представлении одного класса аналитических функций / А.А. Атвиновский // Изв. Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4(67). – С. 3–7.

4. Миротин, А.Р. Обращение операторно-монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин // Труды института математики. – 2004. – Т. 12, № 1. – С. 104–108.

5. Haasse, M. The functional calculus for sectorial operators / M. Haasse. – Basel. : Birkhauser Verlag, 2006. – 392 p.

6. Брычков, Ю.А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М., 1977. – 286 с.

7. Widder, D.V. The Laplace transform / D.V. Widder. – Princeton, 1946. – 406 p.

8. Евграфов, М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – М., 1991. – 447 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.10.12