

Композиционные формации с системами дополняемых подформаций

И.В. БЛИЗНЕЦ

В работе изучаются композиционные формации с системами дополняемых подформаций. В частности, доказана следующая теорема:

Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, $\mathfrak{F} \neq (1)$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) каждый атом решетки $L_c(\mathfrak{F})$ дополняем в решетке $L(\mathfrak{F})$;
- 2) каждая группа G из $\mathfrak{F}$ имеет разложение

$$G = A \times A_1 \times \dots \times A_t,$$

где A – нильпотентная подгруппа в G , $A_1, \dots, A_t$ – простые неабелевы группы.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, прямое разложение класса групп, формация, ω -композиционный спутник, n -кратно ω -композиционная формация.

The paper studies compositional formations with systems of complemented subformations. In particular, the following theorem is proved:

Let $\mathfrak{F}$ be a compositional formation, $\mathfrak{F} \neq (1)$. Then the following conditions are equivalent:

- 1) each atom lattice $L_c(\mathfrak{F})$ is complemented in the lattice $L(\mathfrak{F})$;
- 2) each G group from $\mathfrak{F}$ has an expansion as follows,

$$G = A \times A_1 \times \dots \times A_t,$$

where A is a nilpotent subgroup in G , while $A_1, \dots, A_t$ being simple non-abelian groups.

Keywords: finite group, class of groups, direct decomposition of class of groups, formation, ω -composition satellite, n -multiply ω -compositional formation.

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем пользоваться стандартной терминологией, принятой в [1]–[4].

Символом c_ω мы будем обозначать решетку всех ω -композиционных формаций. Если $\mathfrak{F}$ – произвольная ω -композиционная формация, то символом $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех ω -композиционных подформаций ω -композиционной формации $\mathfrak{F}$. В частности, символом $L_c(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех композиционных подформаций композиционной формации $\mathfrak{F}$.

На основе результатов [5] мы опишем композиционные формации, в которых каждый атом решетки $L_c(\mathfrak{F})$ дополняем в решетке $L(\mathfrak{F})$.

Лемма 1. В том и только в том случае формация M является атомом решетки c_ω , когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $M = \text{form}A$, где A – простая группа и $|A| \notin \omega$;
- 2) $M = N_p$, где $|A| = p \in \omega$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку по определению $M \neq (1)$, то в M имеется простая группа A . Пусть $M_0 = c_\omega \text{form}A$. Тогда поскольку M – атом решетки c_ω , то $M_0 = M$. Если $|A| = p \in \omega$, то $N_p \subseteq M$. Значит, $N_p = M$. Пусть $|A| \notin \omega$. Тогда формация $\text{form}A$ является ω -композиционной. Значит,

$$\text{form}A = c_\omega \text{form}A = M.$$

Достаточность доказывается прямой проверкой.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{F} = c_\omega \text{form} G$ – однопорожденная ω -композиционная формация. Тогда у решетки $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число атомов.

Доказательство. Пусть M – атом решетки $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$. Тогда, по лемме 1, $M = c_\omega \text{form} A$ для некоторой простой группы A . Предположим, что $|A| = p \in \omega$. Тогда

$$A/C^p(A) \in f(Z_p),$$

где f – минимальный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, $f(Z_p) \neq 0$ и поэтому

$$Z_p \in K(\mathfrak{F}) \cap L = K(G) \cap L.$$

Но у группы G имеется лишь конечное число композиционных факторов. Следовательно, у формации $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное число таких подформаций M , что M – атом решетки $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ и $K(M) \subseteq L$.

Пусть теперь $|A| \notin \omega$. В этом случае $A_{EL} = 1$. И поэтому

$$A \square A/A_{EL} \in f(L') = \text{form}(G/G_{EL}).$$

Понятно, что $\text{form} A = M$ – атом решетки всех подформаций формации $f(L')$. Но, согласно лемме 4.3.11 [3], в такой решетке имеется лишь конечное число атомов. Таким образом, в решетке $L_{c_\omega}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число таких атомов M , что $K(M) \cap L = \emptyset$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, $\mathfrak{F} \neq (1)$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) каждый атом решетки $L_c(\mathfrak{F})$ дополняем в решетке $L(\mathfrak{F})$;
- 2) каждая группа G из $\mathfrak{F}$ имеет разложение

$$G = A \times A_1 \times \dots \times A_t,$$

где A – нильпотентная подгруппа в G , $A_1, \dots, A_t$ – простые неабелевы группы.

Доказательство. Предположим прежде, что выполняется условие 1). Тогда

$$\mathfrak{F} \subseteq \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} c_\omega \text{form} G.$$

Значит, для доказательства 2) достаточно показать, что условие 2) выполняется в любой однопорожденной композиционной подформации $\mathfrak{F}_0$ из $\mathfrak{F}$.

Пусть M – атом решетки $L_c(\mathfrak{F}_0)$. Тогда M – атом решетки $L_c(\mathfrak{F})$, и поэтому, согласно условию, в формации $\mathfrak{F}$ найдется такая подформация H , что

$$\mathfrak{F} = \text{form}(M \cup H) = M \oplus H.$$

Пусть $H_0 = H \cap \mathfrak{F}_0$. Тогда H_0 – дополнение к M в $\mathfrak{F}_0$. Действительно, согласно теореме 4.1.12 [3], решетка всех формаций модулярна. Значит,

$$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \cap (M \oplus H) = M \oplus (\mathfrak{F}_0 \cap H).$$

Таким образом, условие 1) выполняется и в $\mathfrak{F}_0$. По лемме 6 [5], число атомов решетки $L_c(\mathfrak{F}_0)$ конечно. Пусть это число равно n . Утверждение 2) докажем индукцией по n . Согласно лемме 3 [5], формация $\mathfrak{F}_0$ сама является композиционной. И поскольку MH_0 , то у решетки $L_c(H_0)$ число атомов меньше, чем n .

Если $n=1$, то $H_0 = (1)$, т. е. $\mathfrak{F}_0 = M$. По лемме 5 [5], либо $M = \text{form} A$, где A – простая неабелева группа, либо $M = N_p$ для некоторого простого числа p . Согласно [2], в первом случае любая неединичная группа из $\mathfrak{F}_0 = M$ имеет вид $A_1 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \square A_2 \square \dots \square A_t$ – простая группа. Во втором случае любая группа из $\mathfrak{F} = N_p$ нильпотентна.

Предположим теперь, что $n > 1$ и что утверждение 2) верно для всех композиционных формаций, у которых решетка композиционных подформаций имеет число атомов меньше,

чем n . В этом случае, конечно, утверждение 2) относительно H_0 верно. Но $\mathfrak{Z}_0 = M \oplus H_0$ и поэтому каждая группа G из $\mathfrak{Z}$ имеет вид:

$$G = A \times B,$$

где $A \in M$, $B \in H_0$. Значит, утверждение 2) выполняется относительно формации $\mathfrak{Z}_0$. Таким образом, это условие выполняется и относительно формации $\mathfrak{Z}$.

Предположим теперь, что выполняется утверждение 2) и M – атом решетки $L_c(\mathfrak{Z})$. Покажем, что M имеет дополнения в решетке $L(\mathfrak{Z})$.

Пусть X_1 – множество всех простых групп, входящих в формацию M , X – множество всех простых групп, входящих в формацию $\mathfrak{Z}$, и $X_2 = X \setminus X_1$. Пусть $H = \text{cform} X_2$. Покажем, что H – дополнение к M в решетке $L(\mathfrak{Z})$, т. е. что

$$M \cap H = (1), \quad \text{form}(M \cup H) = \mathfrak{Z}.$$

Прежде установим, что

$$\mathfrak{Z} = \text{form}(M \cup H).$$

Предположим, что это не так, и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{Z} \setminus \text{form}(M \cup H)$.

Тогда группа A монолитична, и если R – цоколь группы A , то $R = A^{\text{form}(M \cup H)}$. В силу свойства 2) либо A – p -группа для некоторого простого p , либо A – простая неабелева группа. Предположим, что имеет место первый случай. Предположим, что $R = A$ – группа порядка p . Тогда A – простая группа. Но $A \in \mathfrak{Z}$ и поэтому либо $A \in X_1$, либо $A \in X_2$. В обоих случаях это дает

$$A \in M \cup H \subseteq \text{form}(M \cup H),$$

что противоречит выбору группы A . Таким образом, $R \neq A$. Но

$$A/R \in \text{form}(M \cup H)$$

и поэтому формации $\text{form}(M \cup H)$ принадлежит группа B порядка p . Предположим $B \notin M \cup H$. Тогда, согласно теореме 1.2.25 [3], в формации $\text{form}(M \cup H)$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \dots, N_t, M_1, \dots, M_t$ ($t \geq 2$), что выполняются следующие утверждения: а) $H/N \cong A$, $M/N = \text{Soc}(H/N)$; б) $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$; в) H/N_i – монолитическая X -группа с монолитом M_i/N_i , который H -изоморфен M/N .

Из условий а) и в) вытекает, что

$$B \in K(M_i/N_i) \subseteq K(H/N_i) \subseteq K(M \cup H) = K(M) \cup K(H).$$

Если $B \in K(M)$, то $N_p \subseteq M$ и поэтому $A \in M$. Аналогично, видим, что если $B \in K(H)$, то $A \in H$, т. е.

$$A \in M \cup H \subseteq \text{form}(M \cup H),$$

противоречие. Итак, A – простая неабелева группа. Но тогда, согласно лемме 2.1.7 [3], мы сразу имеем, что

$$A \in M \cup H \subseteq \text{form}(M \cup H).$$

Полученное противоречие показывает, что

$$\mathfrak{Z} = \text{form}(M \cup H).$$

Покажем теперь, что

$$M \cap H = (1).$$

Предположим, что это не верно. И пусть A – произвольная простая группа из пересечения $M \cap H$.

Рассмотрим сначала случай, когда $|A| = p$ – простое число. Из [4]

$$K(M) = K(X_1), \quad K(X_2) = K(H).$$

Но

$$A \in K(M) \cap K(H).$$

Значит,

$$A \in X_1 \cap X_2 = \emptyset,$$

противоречие. Таким образом,

$$M \cap H = (1),$$

т. е. H – дополнение к M в решетке $L(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989 – 253 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Скиба, А.Н. Кратно L -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Близнец, И.В. Разложимые n -кратно ω -композиционные формации / И.В. Близнец, А.Н. Скиба // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4(67). – С. 45–48.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 26.04.12