Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(75), 2012

УДК 512.542

О пересечении A-допустимых максимальных подгрупп, не содержащих p-нильпотентный радикал

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич

Исследуются пересечения заданных систем максимальных подгрупп конечных групп.

Ключевые слова: максимальная подгруппа, группа операторов, локальная формация, $\Im$-абнормальная подгруппа, подгруппа Фраттини.

The intersections of the given systems of maximal subgroups of finite groups are studied in this article.

Keywords: maximal subgroup, group of operators, local formation, $\Im$-abnormal subgroup, Frattini subgroup.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Одно из направлений теории пересечений максимальных подгрупп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Данное направление берет начало с работы Фраттини [1], установившего нильпотентность пересечения $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп конечной группы G. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]).

В настоящее время одно из направлений развития данной теории связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не содержащих некоторую нормальную подгруппу конечной группы [4].

Данная работа посвящена развитию указанного направления в группах с операторами.

Определения и обозначения

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп $\Im$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \Im$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \Im$;

2) если $G/N_1 \in \Im$ и $G/N_2 \in \Im$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \Im$.

Пусть $\Im$ – формация. Тогда через $G^{\Im}$ обозначается $\Im$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \Im$. Если $\Im$ – формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\Im$-подгрупп, то наибольшую нормальную $\Im$-подгруппу называют $\Im$-радикалом группы G и обозначают $G_{\Im}$.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M

называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G,A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп. Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Phi(G,A)=G$.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-радикал группы G, либо $MG_{\mathfrak{F}}=G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G_{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а следовательно, A-допустимая, то $MG_{\mathfrak{F}}=M$ или $MG_{\mathfrak{F}}=G$. Аналогичные рассуждения верны и для $\mathfrak{F}$-корадикала.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, через $D^{\mathfrak{F}}(G,A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Введем следующие обозначения:

$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G,A)$ – подгруппа группы G, равная пересечению ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал, $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$;

$D^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G,A)$ – подгруппа группы G, равная пересечению ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал и $\mathfrak{F}$-корадикал;

$D^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G,A)$ – подгруппа группы G, равная пересечению ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, содержащих $\mathfrak{F}$-радикал и не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал.

В частном случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация p-нильпотентных групп $G_{p'}G_p$ (нильпотентных групп N), подгруппу $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_F}(G,A)$ будем обозначать $\overline{D}^{p}_{\overline{F}_p}(G,A)$ ($\overline{D}^{N}_{\overline{F}}(G,A)$).

Если A – единичная группа операторов, то понятия A-допустимой максимальной подгруппы, не содержащей $\mathfrak{F}$-корадикал, и максимальной $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппы совпадают. В этом случае будем использовать обозначения $\overline{\Phi}^{p}_{\overline{F}_p}(G)$ и $\overline{\Phi}^{N}_{\overline{F}}(G)$.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех ненормальных максимальных подгрупп группы G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Пример 2.1. *Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G=[Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q. В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3, но не является максимальной подгруппой группы Q.*

Пример 2.2. *Рассмотрим группу*

$$G^{*} = \langle a,b,c \mid a^2=b^3=c^3=1, bc=cb, b^a=c \rangle .$$

Тогда $G^{*}=[G]A$, где $G=\langle b\rangle \times \langle c\rangle$ и $A=\langle a\rangle$ – группа операторов группы G. Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A-допустимая подгруппа $H=\langle bc\rangle$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например b, являются A-

допустимыми. Отмеченный класс групп становится достаточно широким, если образовать группу $R = G^* \times Q$, *где* Q *– сверхразрешимая группа и* $(|G|,|Q|)=1$.

Вспомогательные результаты

Теорема 3.1. [5, с. 59]. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *–* S_n*-замкнутая локальная формация и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Тогда* $D^{\mathfrak{I}}(G,A) = A \times B$, *где* $A \in \mathfrak{I}$, $B \subseteq \Phi(G,A)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$.

Теорема 3.2. [5, с. 59]. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, $\mathfrak{I}$ *– формация. Если в группе* G *существуют максимальные* A*-допустимые подгруппы, не содержащие* $\mathfrak{I}$*-корадикал и не принадлежащие* $\mathfrak{I}$, *тогда пересечение всех таких подгрупп совпадает с* $D^{\mathfrak{I}}(G,A)$.

Теорема 3.3. [5, с. 59]. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *–* S_n*-замкнутая локальная формация и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если* N *– нормальная* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $N / N \cap D^{\mathfrak{I}}(G,A) \in \mathfrak{I}$, *тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N = N_1 \times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{I}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi(G,A)$.

Лемма 3.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$ *и* $D^p(G,A) \neq G$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $D^p(G,A) \subseteq F_p(G)$, *если* G *– разрешимая неединичная группа, то* $D^p(G,A) \subset F_p(G)$;

2) $F_p(G / D^p(G,A)) = F_p(G) / D^p(G,A)$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что $D^p(G,A)$ является p-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $D^p(G,A) \subseteq F_p(G)$. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $G / D^p(G,A)$ разрешима и неединична. Пусть $B / D^p(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G / D^p(G,A)$. Так как $B / D^p(G,A)$ – p-группа для некоторого простого p, а формация p-нильпотентных групп является нормально наследственной локальной формацией, содержащей все нильпотентные группы, то по теореме 3 из [5] B является p-нильпотентной, а это значит, что $B \subseteq F_p(G)$. Следовательно, $D^p(G,A) \subset G$.

Если $F_p(G / D^p(G,A)) = K / D^p(G,A)$, то K является p-нильпотентной подгруппой, поэтому $K \subseteq G$ и $F_p(G / D^p(G,A)) \subseteq F_p(G) / D^p(G,A)$. Обратное включение следует из определения подгруппы $F_p(G)$.

Основной результат

Теорема 4.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

1) в разрешимой неединичной группе выполняется равенство $D^p_{\overline{F}_p}(G,A) = D^p(G,A)$;

2) в разрешимой не p*-нильпотентной группе подгруппа* $D^p_{F_p}(G,A) \in (G_{p'}G_p)^2$.

Доказательство. Подгруппы $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ и $D^p_{F_p}(G,A)$ являются характеристическими в G и

$$D^p_{\overline{F}_p}(G,A)\cap D^p_{F_p}(G,A)=D^p(G,A).$$

Для факторгруппы $G/D^p(G,A)$ выполняется

$$F_p(G/D^p(G,A))=F_p(G)/D^p(G,A),$$

поэтому

$$D^p_{\overline{F}_p}(G/D^p(G,A))=D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A).$$

Предположим, что $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A)\neq 1$ и пусть $K/D^p(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/D^p(G,A)$, содержащаяся в $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A)$. Так как формация p-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/D^p(G,A)$ p-нильпотентна и по теореме 3.3 K является p-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $K\subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K\subseteq D^p_{\overline{F}_p}(G,A)\cap D^p_{F_p}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)/D^p(G,A)=1$, а значит, $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)=D^p(G,A)$.

Пусть G – разрешимая не p-нильпотентная группа. Из того, что $F_p(G)\subseteq D^p_{F_p}(G,A)F_p(G)$ и $D^p_{F_p}(G,A)/F_p(G)=D^p(G/F_p(G),A)$, следует, что подгруппа $D^p_{F_p}(G,A)\in(G_{p'}G_p)^2$.

Следствие 4.1.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, тогда в разрешимой неединичной группе подгруппа $D^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ p-нильпотентна.*

Если группа операторов A является тривиальной, то имеет место следующее

Следствие 4.1.2. *Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $G\neq 1$, то $\Phi^p_{\overline{F}_p}(G)=\Phi^p(G)$;

2) в любой не p-нильпотентной группе G подгруппа $\Phi^p_{F_p}(G)\in(G_{p'}G_p)^2$.

Следствие 4.1.3. *В разрешимой неединичной группе подгруппа $\Phi^p_{\overline{F}_p}(G)$ является p-нильпотентной.*

Если вместо формации p-нильпотентных групп выбрать формацию всех нильпотентных групп, то из следствия 4.1.2 вытекает результат из работы [4].

Теорема 4.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, G – разрешимая группа. Если $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)\neq G$, то $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)=D^p(G,A)$.*

Доказательство. Пусть G обладает не p-нильпотентными максимальными A-допустимыми подгруппами, не содержащими $G_{p'}G_p$-корадикал и не содержащими $F_p(G)$. Не сложно заметить, что

$$D^p(G,A)\subseteq\overline{D}^p(G,A)\subseteq\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$$

и согласно теореме 3.2 $D^p(G)=\overline{D}^p(G,A)$.

Пусть подгруппа $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ не совпадает с подгруппой $\overline{D}^p(G,A)$, тогда $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{D}^p(G,A)\neq 1$, и пусть $K/\overline{D}^p(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\overline{D}^p(G,A)$, содержащаяся в $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{D}^p(G,A)$. Так как формация p-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/\overline{D}^p(G,A)$ p-нильпотентна. Тогда на основании теоремы 3.3 следует, что K p-нильпотентная подгруппа. Следовательно, $K \subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K \subseteq \overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A) \cap \overline{D}^p_{F_p}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)/\overline{D}^p(G,A) = 1$, а значит, $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A) = D^p(G,A)$.

Применяя теоремы 3.1 и 4.2, получаем следующее

Следствие 4.2.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, G *– разрешимая группа. Если* $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A) \neq G$, *то* $\overline{D}^p_{\overline{F}_p}(G,A)$ *–* p*-нильпотентная подгруппа группы* G.

В случае, когда группа операторов A является тривиальной, из теоремы 2 получаем

Следствие 4.2.2. *Пусть* G *– разрешимая группа. Если* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G) = \Phi^p(G)$.

Следствие 4.2.3. *Пусть* G *– разрешимая группа. Если* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G) \neq G$, *то* $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G)$ *–* p*-нильпотентная подгруппа группы* G.

Если вместо формации p-нильпотентных групп взять формацию нильпотентных групп, то из теоремы 2 получаем

Следствие 4.2.4. *Пусть* G *– разрешимая группа. Если в группе* G *существуют ненильпотентные неинвариантные максимальные подгруппы, не содержащие* $F(G)$, *то пересечение всех таких подгрупп совпадает с* $\Delta(G)$.

Из следствия 4.2.4 вытекает соответствующий результат работы [4].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

5. Бородич, Е.Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник Брестского университета. – 2012. – Сер. 1, № 1. – С. 54–62.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 02.11.12