

кратности высокочастотного напряжения прямой метод измерения амплитуды и частоты когерентных фазовых колебаний представляет значительные трудности. Эту информацию гораздо проще получить измерением когерентного отклонения энергии частиц от равновесной, возникающей при фазовых колебаниях. Известно [8], что при $E_s \gg mc^2$

$$\frac{d\Phi}{dt} = q\omega_0 \alpha \frac{\Delta E}{E_s}(t), \quad (23)$$

где q — кратность частоты ускоряющего напряжения; ω_0 — частота обращения частиц по орбите; α — логарифмическая производная длины орбиты по импульсу. Допустим, что мгновенное значение фазы ускоряющего напряжения, при котором центр тяжести пучка проходит через середину ускоряющего промежутка, под действием внешнего возмущения определяется выражением

$$\Phi = \Phi_s + \Delta\phi \cos \Omega t, \quad (24)$$

где Φ_s — значение равновесной фазы; $\Delta\phi$ — амплитуда колебания фазы; Ω — частота колебания. В этом предположении выражение (23) будет иметь вид

$$-\Delta\phi \Omega \sin \Omega t = q\omega_0 \alpha \frac{\Delta E}{E_s}(t). \quad (25)$$

Измерим координаты и их производные по азимуту на концах одного магнитного блока и определим величину суммарного возмущения, возникающего вследствие отклонений величины магнитного поля в блоке и средней энергии частиц в пучке:

$$\begin{aligned} & r_2 F_2^{*'} - r_2' F_2^* - r_1 F_1^{*'} + r_1' F_1^* = \\ & = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\rho} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F^* \frac{\Delta H}{H_0}(\theta) d\theta - \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{\Delta E}{\rho E_s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F^* d\theta. \end{aligned}$$

Величина отклонения магнитного поля в блоках



Фазовая устойчивость системы частиц в ускорителях с автоуправлением

Э. А. Жильков, А. Н. Лебедев

Поставлена задача о фазовой устойчивости системы частиц в циклическом ускорителе с автокоррекцией частоты ускоряющего поля по пучку. Методом кинетического уравнения исследована устойчивость нелинейных синхронных колебаний при произвольных характеристиках системы автоуправления. Получены некоторые общие критерии устойчивости.

в течение цикла ускорения меняется значительно медленнее, чем когерентное отклонение энергии частиц, из-за фазовых колебаний. Поэтому выделенная высокочастотная составляющая выражения (24) определит амплитуду и частоту колебания $\frac{\Delta E}{E}(t)$. Частота изменения $\frac{\Delta E}{E}(t)$ может быть измерена многочисленными известными методами. Амплитуда фазовых колебаний будет связана с величиной максимального отклонения энергии пучка выражением

$$\Delta\phi = \frac{q\omega_0 \alpha}{\Omega} \cdot \frac{\Delta E}{E_0} \text{ макс.} \quad (26)$$

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить С. М. Рубчинского, Э. Л. Бурштейна, А. А. Васильева, Ю. Ф. Орлова, С. А. Хейфеца и В. М. Харитонову за обсуждение работы и М. А. Гарзоян за помощь в ее осуществлении.

Поступила в Редакцию 13/V 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Васильев, А. А. Кузьмин, Ю. С. Иванов. «Приборы и техника эксперимента», № 4, 111 (1962).
2. Э. Л. Бурштейн, Ю. С. Иванов, А. А. Кузьмин. Там же, стр. 102.
3. Э. Л. Бурштейн и др. «Атомная энергия», 12, вып. 2 (1962).
4. А. А. Васильев, А. А. Кузьмин, В. А. Уваров. «Приборы и техника эксперимента», № 4, 134 (1962).
5. А. А. Васильев. В кн. «Труды Международной конференции по ускорителям (Дубна, 1963)». М., Атомиздат, 1964, стр. 871.
6. А. А. Васильев. «Докл. АН СССР», 148, 577 (1963).
7. А. И. Дзергаич, В. А. Карпов. См. [5], стр. 867.
8. С. А. Хейфец. Электронный синхротрон. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1963.

УДК 621.384.60

такого типа практически наиболее важной и в настоящее время широко используемой является система автоподстройки частоты ускоряющего поля по радиальному (или фазовому) смещению ускоряемых частиц, позволяющая значительно повысить устойчивость когерентных синхротронных колебаний по отношению к различным возмущениям. Исследование, проведенное в линейном приближении [3], показало, что частота когерентных синхротронных колебаний, т. е. колебаний центра сгустка, повышается в $(1 + K)^{1/2}$ раз, где K — коэффициент усиления в кольце авторегулирования по радиальному смещению пучка. Кроме того, оказывается возможным осуществить сильное затухание когерентных колебаний.

Колебания около центра сгустка, рассмотренные в работе [3] в линейном приближении, не подвергаются действию авторегулирования и имеют обычную частоту синхротронных колебаний. Естественно, что нелинейный характер фазового движения должен изменять эту картину, приводя к связи колебаний центра сгустка и свободных колебаний около него. Представление о характере такой связи можно получить в том случае, если рассмотреть первые моменты распределения, что сделано в работе [4] и более строго в первом и втором разделах настоящей статьи.

Однако при последовательной постановке задачи речь должна идти об устойчивости системы, обладающей большим, практически бесконечным числом степеней свободы, соответствующим большому числу ускоряемых частиц. Ниже показано, что такое исследование может быть проведено методом кинетического уравнения с самосогласованным взаимодействием. Оказалось возможным получить весьма общее характеристическое уравнение, пригодное для широкого класса систем регулирования и дающее в принципе ответ на поставленную задачу.

В настоящей работе мы ограничились исследованием некоторых общих свойств этого уравнения, не зависящих от выбора параметров или обратной связи. Расчет конкретной системы, требующий учета ряда чисто радиотехнических соображений, будет проведен в отдельной работе.

1. Постановка задачи

Для описания синхротронных колебаний отдельной частицы используем канонические

сопряженные переменные

$$\varphi; u = \frac{2\pi\Omega_0}{eV \sin \varphi_s} \int_{E_s}^E \frac{dE}{\omega(E)}, \quad (1.1)$$

где $\omega(E)$ — частота обращения частицы с энергией E ; V и φ — амплитуда и фаза ускоряющего напряжения соответственно; Ω_0 — частота линейных синхротронных колебаний в отсутствие автоуправления. Явной зависимостью параметров Ω_0 , V и т. д. от времени мы будем пренебрегать. Если в качестве независимой переменной выбрать $\tau = \Omega_0 t$, то уравнение синхротронных колебаний можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= F(\varphi) = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_s}{\sin \varphi_s}; \\ \dot{\varphi} &= u + \Delta(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где $\Delta(\tau)$ — корректирующая поправка к частоте ускоряющего поля, связанная с работой системы автоуправления и выраженная в единицах Ω_0 .

Согласно (1.2) кинетическое уравнение, описывающее изменение функции распределения $f(u, \varphi, \tau)$, имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + (u + \Delta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + F(\varphi) \frac{\partial}{\partial u} \right] f(u, \varphi, \tau) = 0. \quad (1.3)$$

В зависимости от параметров следящей системы величина Δ может быть связана с различными характеристиками сгустка: координатами его центра тяжести, размерами и т. д. В общем случае, если обозначить через $K(u, \varphi, \omega)$ реакцию системы при частоте ω на смещение точечного сгустка по u и φ , то в Фурье-представлении величину $\Delta(\omega)$ можно записать в виде линейного функционала от функции распределения

$$\Delta(\omega) = \iint K(u, \varphi, \omega) f(u, \varphi, \omega) du d\varphi. \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) представляют собой замкнутую интегро-дифференциальную систему, описывающую поведение всей совокупности частиц в ускорителе с автоуправлением. В дальнейшем мы будем исходить из того, что эта система допускает стационарное (равновесное) решение: $f_0(u, \varphi)$, $\Delta_0 = \text{const}$. Отметим, что постоянная составляющая сигнала коррекции Δ_0 , связанная с равновесным распределением, может быть без ограничения общности положена равной нулю, так как это сводится просто к несущественному переопределению равновесной энергии. Нетрудно видеть, что возможен весьма широкий класс равновес-

ных распределений, к которому предъявляется единственное требование — постоянство f_0 вдоль фазовой траектории [см. формулу (3.2)]. В общем случае центр равновесного распределения φ_0 сдвинут относительно равновесной фазы φ_s вследствие нелинейности синхротронных колебаний, т. е. вследствие отклонения потенциальной ямы — $\int F d\varphi$ от параболической. Этот сдвиг оказывается тем больше, чем больше равновесный фазовый размер сгустка. В соответствии со сделанным выше предположением об отсутствии в равновесном состоянии сигнала коррекции Δ_0 следует считать, что по энергии центр равновесного распределения совпадает с E_s , т. е. $u_0 = 0$.

2. Метод моментов

Рассмотрим прежде всего случай сгустка достаточно малых размеров, так как на этом примере легче проследить физический смысл полученных ниже соотношений. Умножая кинетическое уравнение (1.3) на $(\varphi - \varphi_0)^j u^k$ и интегрируя по всему фазовому пространству, получаем систему уравнений для совокупности моментов распределения $M_{j,k} = \overline{(\varphi - \varphi_0)^j u^k}$ (черта означает усреднение):

$$\dot{M}_{j,k} - jM_{j-1,k+1} - j\Delta M_{j-1,k} - kF(\varphi) (\varphi - \varphi_0)^j u^{k-1} = 0. \quad (2.1)$$

Согласно сделанному выше предположению о малости сгустка моменты распределения должны быстро уменьшаться с увеличением их номера. Разложив величину $F(\varphi)$ в ряд Тейлора около точки φ_0 , уравнение (2.1) целесообразно привести к виду

$$\dot{M}_{j,k} - jM_{j-1,k+1} - j\Delta(\tau) M_{j-1,k} - k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{F^{(l)}(\varphi_0)}{l!} M_{j+l,k-1} = 0. \quad (2.2)$$

Отметим, что система уравнений (2.2), вообще говоря, нелинейна, поскольку сигнал коррекции Δ связан с моментами соотношением (1.4). Используем теперь то, что фазовый размер сгустка $A \ll 1$ и что момент $M_{j,k}$ ($j, k \neq 0$) имеет порядок малости A^{j+k} . Поскольку равновесный сигнал $\Delta_0 = 0$, то с точностью до членов $\sim A^2$ уравнение (2.2) дает

$$\varphi_0 \approx \varphi_s - \frac{\text{ctg } \varphi_s}{2} M_{0,2}^0; \quad M_{0,2}^0 \approx M_{2,0}^0, \quad (2.3)$$

а все остальные равновесные моменты, которые мы обозначаем верхним индексом 0, либо равны нулю, либо имеют высший порядок малости. Следует отметить, что сдвиг центра сгустка от равновесной фазы оказывается порядка A^2 .

Чтобы найти собственные частоты исследуемой системы, надо линеаризовать уравнение (2.2) около положения равновесия, применить к нему преобразование Фурье (искать решение $\sim \exp i\omega t$) и использовать соотношение, следующее из (1.4):

$$\Delta(\omega) = K_1(\omega) M_{0,1}(\omega) + K_2(\omega) M_{1,0}(\omega) + K_3(\omega) M_{2,0}(\omega) + \dots, \quad (2.4)$$

где

$$K_1 = \left. \frac{\partial K}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ \varphi=\varphi_0}}; \quad K_2 = \left. \frac{\partial K}{\partial \varphi} \right|_{\substack{u=0 \\ \varphi=\varphi_0}}; \\ K_3 = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \varphi^2} \right|_{\substack{u=0 \\ \varphi=\varphi_0}} \text{ и т. д.} \quad (2.5)$$

Для простоты ограничимся лишь двумя первыми членами разложения (2.4), т. е. будем считать характеристику следящей системы $K(\bar{u}, \varphi, \omega)$ линейной по u и φ . Другими словами, предполагается, что корректирующий сигнал вырабатывается по данным о движении центра сгустка $\bar{\varphi}$ и \bar{u} и не зависит от его размеров, формы и т. д. При отказе от этого ограничения никаких принципиальных трудностей при расчете не возникает, однако выкладки становятся слишком громоздкими.

Если ограничиться в уравнениях (2.2) членами $\sim A^2$ включительно, то в рассмотренные попадут лишь первые и вторые моменты распределения, образующие две независимые подсистемы. Их парциальные частоты в этом приближении будут равны:

$$\omega = -i \frac{K_2}{2} \pm \left[1 + K_1 - \frac{K_2^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ — для первых} \\ \text{моментов;} \quad (2.6)$$

$$\omega = 0, \pm 2 \text{ — для вторых моментов.} \quad (2.7)$$

Таким образом, получается известный из работы [3] результат: введением глубокой обратной связи ($|K_{1,2}| \gg 1$) можно сильно увеличить «жесткость» колебаний центра тяжести сгустка и даже создать их затухание (например, при $\text{Re } K_2 < 0$). Собственная частота колебаний вторых моментов, которые в этом приближении остаются свободными, равна удвоенной частоте синхротронных колебаний в отсутствие авторегулирования.

Учет членов $\sim A^4$ позволяет найти поправки к собственным частотам первых двух моментов. Члены $\sim A^3$ дают возможность определить лишь парциальные частоты третьих моментов, равные, естественно, ± 1 и ± 3 . Эти расчеты довольно громоздки, так как связаны с вычислением детерминанта 10-го порядка. Приведем лишь наиболее важный результат — поправку первого приближения к действительной парциальной частоте $\omega = 2$ вторых моментов, поскольку малые поправки к комплексным частотам (2.6) не могут качественно изменить характер движения. Предположим, что $\omega = 2 + \alpha$ ($|\alpha| \ll 1$), тогда

$$\alpha \approx \frac{\text{ctg}^2 \varphi_s M_{2,0}^2 [iK_2(\omega) - 2K_1(\omega)]}{6[K_1(\omega) - 2iK_2(\omega) - 3]} \Big|_{\omega=2}. \quad (2.8)$$

Таким образом, на этой частоте возможны и затухание ($\text{Im } \alpha > 0$) и раскачка ($\text{Im } \alpha < 0$) колебаний. Условием устойчивости при $|K_{1,2}| \gg 1$ является, очевидно, неравенство

$$\text{Re} \frac{K_1}{K_2} < 0. \quad (2.9)$$

Скорость затухания или раскачки [при невыполнении (2.9)] пропорциональна квадрату равновесных размеров сгустка. Отметим, что поправка к частоте (2.8) и критерий устойчивости (2.9) оказываются несколько иными, чем в работе [4]. Область применимости полученного критерия будет ясна из приведенного ниже более общего рассмотрения.

3. Метод кинетического уравнения

Изложенный выше метод моментов не является вполне строгим и имеет несколько очевидных недостатков. Прежде всего трудно указать какой-либо регулярный физически обоснованный метод замыкания системы уравнений (2.2). Хотя простое приравнение нулю высших моментов иногда и приводит, как будет видно ниже, к правильному результату, однако ряд эффектов выпадает при этом из рассмотрения. Так, например, изложенным методом не удается получить поправки к собственной частоте за счет нелинейности синхротронных колебаний. Так же, как и при гидродинамическом описании плазмы, метод моментов не учитывает эффектов типа затухания Ландау [5]. Наконец, применимость полученных выше результатов существенно ограничена предположением о малости сгустка.

Чтобы освободиться от этих ограничений, исследуем устойчивость сгустка более общим

методом, исходя непосредственно из кинетического уравнения (1.3). Как и раньше, предположим, что существует некоторое равновесное распределение в фазовом пространстве $f_0(u, \varphi)$, не зависящее явно от времени и не дающее сигнала ошибки. Отклонения от этой равновесной функции распределения $f(u, \varphi, \omega)$ и сигнал ошибки $\Delta(\omega)$ будем предполагать малыми и произведем линеаризацию кинетического уравнения (1.3) по этим малым возмущениям:

$$\left[i\omega + u \frac{\partial}{\partial \varphi} + F(\varphi) \frac{\partial}{\partial u} \right] f(u, \varphi, \omega) = -\Delta(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \varphi}. \quad (3.1)$$

Из того же уравнения легко получить, что равновесная функция распределения должна быть постоянной вдоль фазовой траектории, т. е. $f_0 = f_0(\varepsilon)$, где

$$\varepsilon = \frac{u^2}{2} + U(\varphi) \quad \left(U = - \int_{\varphi_s}^{\varphi} F d\varphi \right) \quad (3.2)$$

есть гамильтониан синхротронных колебаний в отсутствие авторегулирования. В связи с этим в дальнейшем удобно перейти от переменных u, φ к новым канонически сопряженным переменным ε, T , где

$$T = \int_{\varphi_1}^{\varphi} [2(\varepsilon - U)]^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad (3.3)$$

есть время, характеризующее перемещение изображающей точки вдоль фазовой траектории. Обозначим через $\varphi_1(\varepsilon)$ и $\varphi_2(\varepsilon)$ соответственно левую и правую точки поворота фазовых колебаний, определяемые хорошо известным условием:

$$U(\varphi_1) = U(\varphi_2) = \varepsilon. \quad (3.4)$$

Таким образом, при $\varphi = \varphi_2$ величина T равна просто $T_0/2$ — половине периода нелинейных синхротронных колебаний; при $u \geq 0$ соответственно $T \geq 0$.

В новых переменных кинетическое уравнение принимает вид

$$\left[i\omega + \frac{\partial}{\partial T} \right] f(\varepsilon, T, \omega) = \Delta(\omega) \frac{df_0}{d\varepsilon} \cdot F \quad (3.5)$$

и имеет решение

$$f(\varepsilon, T, \omega) = -i\Delta(\omega) \frac{df_0}{d\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{F_k e^{-ik\Omega T}}{\omega - k\Omega}; \quad \Omega \equiv \frac{2\pi}{T_0}, \quad (3.6)$$

где F_k — коэффициенты разложения F как периодической функции переменной T в ряд Фурье на отрезке $(-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2})$:

$$F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} F e^{ik\Omega T} dT. \quad (3.7)$$

Отметим, что согласно определению T [см. (3.3)]

$$\frac{d^2\varphi}{dT^2} = F(\varphi); F_k = -\Omega^2 k^2 \varphi_k; u_k = -ik\Omega \varphi_k. \quad (3.8)$$

Подставляя решение (3.6) в формулу (1.4), сокращая на $\Delta(\omega)$ и выполняя интегрирование по T с учетом того, что $du d\varphi = d\varepsilon dT$, получаем характеристическое уравнение для определения спектра собственных частот:

$$1 = 2\pi i \int_0^{\infty} d\varepsilon \Omega \frac{df_0}{d\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{K_{-k} k^2 \varphi_k}{\omega - k\Omega}. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) можно привести к более удобному виду, если разбить $K(u, \varphi, \omega)$ на две части

$$K = K^+(u, \varphi, \omega) + K^-(u, \varphi, \omega) \quad (3.10)$$

и выделить K^- — часть, линейно зависящую от u . Смысл введенных обозначений состоит в том, что K^+ и K^- являются соответственно четной и нечетной функциями T . Тогда (3.9) можно записать в виде

$$1 = 4\pi i \int_0^{\infty} d\varepsilon \Omega \frac{df_0}{d\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \varphi_k \frac{\omega K_k - k\Omega K_k^-}{\omega^2 - k^2 \Omega^2}. \quad (3.11)$$

Отметим, что преобразование Фурье $\Delta(\omega)$ определяется формулой (1.4) в нижней полуплоскости комплексной переменной ω и аналитически продолжается на верхнюю полуплоскость, которая соответствует затухающим колебаниям [5]. Интересно, что возможность такого затухания в нашем случае связана с нелинейностью синхротронных колебаний, которая вносит зависимость $\Omega(\varepsilon)$.

4. Исследование характеристического уравнения

Из уравнений (3.11) или (3.6) видно, что при уменьшении обратной связи до нуля ($\Delta \rightarrow 0$ и $K \rightarrow 0$) система имеет сплошной спектр собственных частот, которые лежат в полосах вблизи целых значений, соответствующих различным моментам распределения.

Ширина этих полос определяется разбросом $\Omega(\varepsilon)$, т. е. нелинейностью колебаний. Таким образом, этот случай соответствует обычным некогерентным синхротронным колебаниям.

Когерентные эффекты, связанные с системой авторегулирования, мы рассмотрим в нескольких предельных случаях.

Для линейных синхротронных колебаний фаза φ гармонически зависит от T , так что в предельном случае исчезающе малого сгустка только коэффициент φ_1 отличается от нуля, а характеристическое уравнение имеет корни вида (2.6), (2.7). С учетом конечной (но малой) амплитуды колебаний величина φ , как известно, зависит от T следующим образом [6]:

$$\varphi(T) \approx \varphi_s - \sqrt{2\varepsilon} \cos \Omega T - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{ctg} \varphi_s + \frac{\varepsilon \operatorname{ctg} \varphi_s}{6} \cos 2\Omega T + \dots, \quad (4.1)$$

где

$$\Omega \approx 1 - \frac{\varepsilon}{8} \left(1 + \frac{5}{3} \operatorname{ctg}^2 \varphi_s \right) + \dots \quad (4.2)$$

Если, как и в разделе 2, ограничиться случаем

$$K^+ = K_2(\omega)(\varphi - \varphi_0); K^- = u K_1(\omega) \quad (4.3)$$

и искать малые комплексные поправки к собственной частоте $\omega = 2$, то в характеристическом уравнении (3.11) надо оставить члены с $k=1$ и $k=2$, причем при $k=1$ можно сразу положить $\omega = 2$, $\Omega = 1$. Тогда, пренебрегая несущественными малыми членами, с помощью (4.1) приводим характеристическое уравнение к виду

$$\xi = \pi J(\omega) \left(1 + \frac{5}{3} \operatorname{ctg}^2 \varphi_s \right), \quad (4.4)$$

где

$$\xi = \frac{3[3 - K_1(\omega) + 2iK_2(\omega)] \left(1 + \frac{5}{3} \operatorname{ctg}^2 \varphi_s \right)}{2 \operatorname{ctg}^2 \varphi_s [iK_2(\omega) - 2K_1(\omega)]} \Big|_{\omega=2};$$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{df_0}{d\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{\omega^2 - 4 + \varepsilon \left(1 + \frac{5}{3} \operatorname{ctg}^2 \varphi_s \right)}, \quad (4.5)$$

а интеграл J должен вычисляться согласно упомянутому выше правилу.

Как видно из выражений (4.4) и (4.5), поправка к собственной частоте существенно зависит от вида равновесной функции распределения $f_0(\varepsilon)$, нормированной так, что

$$\int_0^{\infty} f_0(\varepsilon) T_0(\varepsilon) d\varepsilon = 1. \quad (4.6)$$

В частности, выбирая f_0 в виде

$$f_0 = \begin{cases} \text{const} & \varepsilon < \varepsilon_{\text{макс}} \\ 0 & \varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}} \end{cases} \quad (4.7)$$

и предполагая, что

$$x = \frac{4 - \omega^2}{\varepsilon_{\text{макс}} \left(1 + \frac{5}{3} \text{ctg}^2 \varphi_s\right)}, \quad (4.8)$$

из выражений (4.4), (4.5) получаем

$$x = 1 + \frac{1}{2\xi} \quad (4.9)$$

или

$$\omega \approx 2 - \frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{4} \left(1 + \frac{5}{3} \text{ctg}^2 \varphi_s\right) - \frac{\varepsilon_{\text{макс}} \text{ctg}^2 \varphi_s (iK_2 - 2K_1)}{12(3 + 2iK_2 - K_1)} \Big|_{\omega=2}. \quad (4.10)$$

Нетрудно видеть, что второе слагаемое в правой части описывает сдвиг частоты за счет нелинейности колебаний, а третье совпадает с выражением (2.8), полученным методом моментов (напомним, что $M_{2,0}^0 \approx \frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{2}$). Условие устойчивости имеет простой вид: $\text{Im} \xi > 0$.

В приведенном примере всюду, кроме точки $\varepsilon = \varepsilon_{\text{макс}}$, $\frac{df_0}{d\varepsilon} = 0$, так что собственное затухание не проявляется. В качестве второго примера рассмотрим треугольное распределение вида

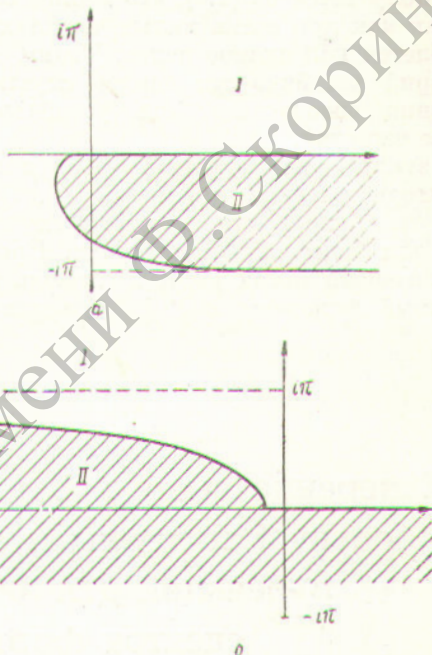
$$f_0 = \begin{cases} \text{const} (\varepsilon_{\text{макс}} - \varepsilon) & \varepsilon < \varepsilon_{\text{макс}} \\ 0 & \varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}} \end{cases} \quad (4.11)$$

которое вместо (4.9) дает

$$\xi = -\frac{1}{2} - x - x^2 \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad (4.12)$$

причем ветвь логарифма выбирается так, чтобы его значение лежало на первом листе при $\text{Im} x > 0$. Для определения границы раздела между областями устойчивости ($\text{Im} x < 0$) и неустойчивости ($\text{Im} x > 0$) на плоскости комплексной переменной ξ достаточно положить в формуле (4.12) $\text{Im} x = 0$. Тогда при изменении $\text{Re} x$ вдоль действительной оси значение логарифма становится равным $\ln \left|1 - \frac{1}{x}\right| + i\pi$ при $0 < \text{Re} x < 1$ и $\ln \left|1 - \frac{1}{x}\right|$ в остальных интервалах. На рисунке *a* представлена область устойчивости, построенная на плоскости комплексной переменной ξ ; на аналогичном рисунке *б* показан случай линейно нарастающего распределения $f_0 = \text{const} \varepsilon$ ($\varepsilon < \varepsilon_{\text{макс}}$).

На основании этих результатов можно заключить, что разброс частиц по частотам синхротронных колебаний оказывает стабилизирующее воздействие на сгусток лишь при спадающих распределениях $f_0(\varepsilon)$, а при нарастающих распределениях приводит к ухудшению устойчивости. Вообще говоря, более благоприятной в смысле устойчивости является



Области устойчивости (I) и неустойчивости (II) сгустка на плоскости комплексной переменной ξ :
a — линейно падающее равновесное распределение; *б* — линейно нарастающее равновесное распределение.

область $\text{Re} \text{Im} \xi > 0$, причем выбор параметров $K_1(2)$ и $K_2(2)$ в этой области не противоречит условию устойчивости колебаний центра сгустка [см. (2.6)].

Остановимся еще на случае $\omega \ll 1$, т. е. исследуем устойчивость сгустка относительно возмущений, медленных по сравнению с синхротронными колебаниями. Разлагая правую часть (3.9) по степеням ω и ограничиваясь линейным членом, получаем решение

$$\omega = i \frac{1 - 2\pi \int_0^\infty d\varepsilon \frac{df_0}{d\varepsilon} \overline{uK}}{2\pi \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\Omega} \cdot \frac{df_0}{d\varepsilon} \overline{\varphi K}} \quad (4.13)$$

справедливое в том случае, если правая часть этого уравнения мала по абсолютной величине

не. Волнистая черта в выражении (4.13) означает усреднение по T при постоянном ε , так что для малого сгустка и системы регулирования вида (4.3) находим

$$\omega \approx -i \frac{1+K_1(\omega)}{K_2(\omega)}; \quad |1+K_1| \ll |K_2|. \quad (4.14)$$

Точно такое же выражение при тех же условиях получается из (2.6), что вполне естественно, так как при очень малых частотах сгустков колеблется как единое целое. Таким образом, критерий устойчивости центра сгустка одновременно обеспечивает его устойчивость на малых частотах.

В заключение отметим, что полученное характеристическое уравнение (3.11) применимо не только для простого случая (4.3), но и для более сложных систем. Кроме того, предлагаемый метод расчета, отнюдь не ограниченный условием $\varepsilon \ll 1$, позволяет исследовать

устойчивость больших сгустков, а также влияние частиц, находящихся вне сепаратриссы.

Авторы выражают свою признательность А. А. Коломенскому за внимание к работе.

Поступила в Редакцию 13/II 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Л. Бурштейн и др. «Докл. АН СССР», 141, 590 (1961); «Атомная энергия», 12, 111 (1962).
2. W. Schnell. Proc. of Intern. Conf. on High Energy Accel. CERN, 1959, p. 485; Ю. С. Иванов, А. А. Кузьмин. «Приборы и техника эксперимента», № 4, 106 (1962).
3. Э. Л. Бурштейн, Ю. С. Иванов, А. А. Кузьмин. «Приборы и техника эксперимента», № 4, 102 (1962).
4. H. Hereward. Proc. of Intern. Conf. on High Energy Accel. Brookhaven, 1961, p. 236.
5. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. М., Физматгиз, 1958, § 29.

УДК 539 172.3

Измерение выхода фотонейтронов из мишеней меди и воды большой толщины и определение функций возбуждения (γ, n) -реакций для O^{16} и Cu^{63} с помощью равновесного спектра фотонов Беленького — Тамма*

И. А. Гришаев, Д. И. Сакора, В. А. Шкода-Ульянов, Б. И. Шраменко

На опыте измерены выходы фотонейтронов из практически бесконечно толстых образцов меди и воды под воздействием электронов с энергией до 66 Мэв. На основании этих данных и теории Беленького — Тамма в соответствии с работами [1, 2] вычислены функции возбуждения (γ, n) -реакций для O^{16} и Cu^{63} . Результаты сопоставляются с данными других авторов, полученными с тонкими образцами при облучении их γ -квантами тормозного излучения.

Если моноэнергетический пучок электронов падает на мишень такой толщины, что происходит практически полное поглощение эффективных к (γ, n) -реакции фотонов, образующихся в веществе в результате развития лавины, то, измерив на опыте выход фотонейтронов, можно сравнить его с выходом фотоней-

тронов, рассчитанным по лавинной теории с использованием известного сечения (γ, n) -реакции на исследуемом ядре. Можно также по экспериментальному значению выхода фотонейтронов вычислить сечение (γ, n) -реакции и сопоставить его с сечениями, полученными другими методами, где не используются результаты лавинной теории. Таким образом, можно судить о применимости лавинной теории в той или иной области энергий для решения различного рода задач, в частности для определения функций возбуждения фотоядерных реакций. В данной работе в качестве исследуемых элементов были выбраны ядра O^{16} и Cu^{63} . Последнее объясняется тем, что исходные данные лавинной теории, а именно вероятности различных процессов, происходящих с γ -квантами и электронами при образовании лавины, лучше оправдываются для легких элементов. Поэтому следует ожидать, что и результаты лавин-

* Настоящая работа является совместной работой Физико-технического института АН УССР и Ужгородского государственного университета.