ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ У ДРЕВНИХ ЕГИПТЯН

В известном математическом папирусе, хранящемся в Московском музее изобразительных искусств, имеется одна задача, приковывающая внимание исследователей благодаря тому, что ответом на нее служит формула, которую можно истолковать как площадь некоторой поверхности. Однако в вопросе о том, о какой именно поверхности здесь идет речь, мнения расходятся. Акад. В. В. *Струве*[1] считал, что это — *половина шара*. *Пит* высказал предположение, что это — *полуцилиндр*

---

[1] W. W. *Struwe*, Mathematisches Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Kunst zu Moskau, Berlin, 1930.

с осевым сечением в виде квадрата. Гипотезу Пита поддерживает целый ряд исследователей, в том числе и Нейгебауэр[1] и Н. Н. Веселовский[2].

Но и та и другая гипотеза в высшей степени маловероятна. В самом деле, невозможно себе представить, чтобы египетский математик эпохи Среднего царства смог экспериментальным путем или, тем более, с помощью инфинитезимальных построений вывести столь сложную формулу, какой является площадь поверхности шара. Вычисление же поверхности цилиндра основано на знании формулы длины окружности. Но о длине окружности ни в одном древнеегипетском математическом тексте не упоминается. Египтяне, повидимому, не знали формулы длины окружности; такой же особенностью отличалась и древнегреческая доархимедовская математика.

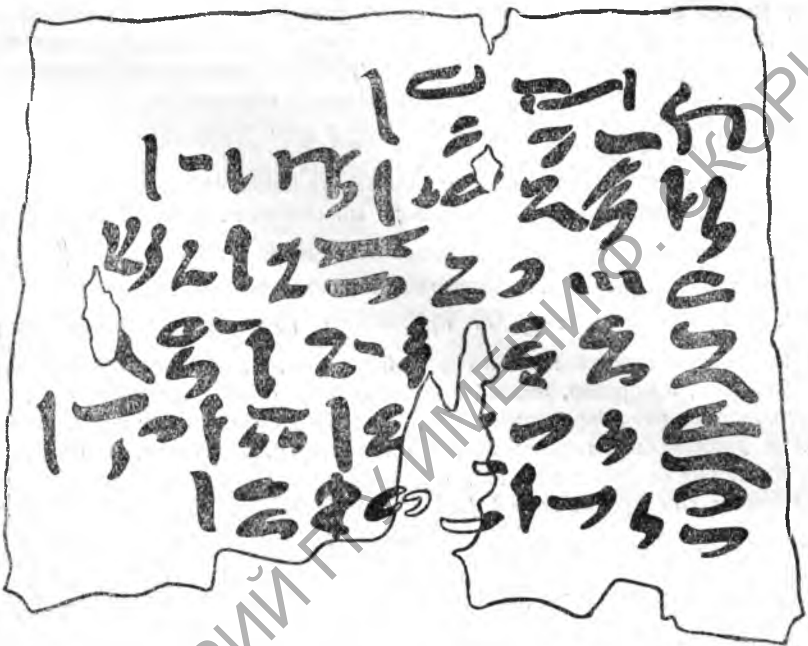

Рис. 1. Московский математический папирус. ГМИИ им. А. С. Пушкина (фрагмент)

Между тем задаче, привлекающей наше внимание, можно дать весьма простое истолкование, не заставляющее предполагать, что египетский автор знает больше того, что имеется в прочих местах математических папирусов: речь идет о площади поверхности такого к о н у с а, разверткой которого служит п о л у к р у г. Для обоснования этого мнения изложим подробнее текст папируса и соображения Струве, Пита и наши.

В столбце XVIII Московского папируса (рис. 1) говорится: «Вычисление сосуда (*nb. t*). Если тебе скажут: сосуд с поперечником отверстия в (*r*) 4 $^1/_2$, узнай его площадь. Найди $^1/_9$ от 9, ибо сосуд есть половина.... Получится 1».

Далее идут вычисления, смысл которых сводится к следующему:

$$9-1=8$$

$$\frac{1}{9}\cdot 8=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

---

[1] Н е й г е б а у э р, Лекции по истории античных математических культур, М.— Л., 1937.

[2] И. Н. В е с е л о в с к и й, Египетская наука и Греция, «Труды Института истории естествознания АН СССР», II (1948).

$$8-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=7\frac{1}{9}$$

$$7\frac{1}{9}\cdot 4\frac{1}{2}=32$$

«Получается 32. Это его площадь. Ты нашел правильно».

Предмет, о котором говорится в задаче, назван *nb.t*. Струве, Пит, а также Нейгебауэр переводят это слово как к о р з и н а. Между тем можно считать, что *nb.t* обозначает вообще вместилище, с о с у д.

Следующее неясное место текста переведено нами так: «С поперечником отверстия в $4\,^1/_2$». Струве переводит это место так: «С устьем по $4^1/_2$ в любом направлении», и делает отсюда заключение, что $4\,^1/_2$ есть д и а м е т р круга. Пит же считает, что здесь речь идет о к в а д р а т е, ибо выражение *r* $4\,^1/_2$ в предыдущем столбце текста применяется к квадрату с данной стороной. Буквально же это место звучит: «Устьем по (*r*) $4^1/_2$ в (*m*) заполнении». Термин «в заполнении» в толковании Пита переводится примерно так: «вдоль и поперек».

Решающим моментом в объяснении всей задачи является то, как мыслить лакуну, обозначенную в вышеприведенном переводе многоточием. Внимательное рассмотрение папируса показывает, что пропущенное слово начинается со знака (i) и оканчивается обрывком иероглифа, имеющим вид половины эллипса. Струве делает предположение, что все слово есть *inr*, причем знак есть детерминатив, изображающий яйцо и обозначающий всякий круглый предмет, в данном случае — ш а р. Речь идет, стало быть, о корзине, имеющей вид полушара с диаметром $D = 4^1/_2$.

Пит полагает, что оборванный иероглиф изображает «бочку, а все слово читается как *ip.t* и должно быть переведено как ц и л и н д р. «Корзина», по Питу, следовательно, имеет вид корыта и является полуцилиндром, построенным на квадрате, как осевом сечении, со стороной $D = 4^1/_2$. Площадь днища такого сосуда, не считая боковых полукругов, действительно, равна $\frac{\pi}{4}\,2\,D^2$, что совпадает с ответом египетского автора (32), если считать, что длина окружности выражается формулой $4\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2$.

Предположение Пита маловероятно не только в силу того, что египтяне не располагали формулой длины окружности, но еще и потому, что вся задача в трактовке Пита приобретает отвлеченный характер, не свойственный египетской математике. В самом деле, какой практический смысл был спрашивать о площади лишь полукруглой ч а с т и корзины, а не всей корзины в целом? Мы знаем, что во всех других задачах (например, папируса Райнда) всегда спрашивается об объеме всего тела, например, амбара или пирамиды.

Между тем восстановить лакуну в папирусе можно очень просто, и притом так, что задача приобретает совершенно естественный вид. Оборванный иероглиф есть ⊙, что представляет собой детерминатив к р у г а, а все слово обозначает *it.n* — к р у г. Итак, в задаче говорится: «Найди $^1/_9$ от 9, ибо сосуд есть половина к р у г а».

Но что это за сосуд, являющийся половиной круга? Таким сосудом может быть только к о н у с, разверткой которого служит полукруг. Конус, получаемый от свертывания полукруга, имеет вполне определенную форму: его осевое сечение есть равносторонний треугольник. Однако в условии задачи ничего не сказано о форме сосуда. Пояснение, что сосуд есть половина круга, появляется лишь в ходе решения, как ссылка на некий общеизвестный факт. Это говорит о том, что *nb. t* (сосуд), площадь которого предлагается вычислить, представлял какой-то общеизвестный предмет. Таким предметом мог быть глиняный кувшин, которым снабжался ш а д у ф — приспособление для подъема воды из колодца. Рисунки древнеегипетских шадуфов (рис. 3) показывают, что такие сосуды имели зачастую именно указанную форму. Теперь задача приобретает и практический смысл: вычисляя поверхность глиняного кувшина, египетский автор получал возможность узнать количество материала (глины), потребного для его изготовления.

Проанализируем теперь вычисления, производимые в папирусе. Так как сосуд образован половиной круга диаметра $2D = 9$, то автор в первых двух действиях находит $\frac{8}{9}\, 2\,D$; в следующих двух строчках он умножает этот результат на $^8/_9$ и получает

$$2\,D\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 7\,\frac{1}{9}.$$

Наконец, все это умножается на D, и получается $\left(\frac{8}{9}\right)^2 2D^2$.

Если, как всегда, считать $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ за $\pi/4$, то ответ, полученный египетским автором, $\frac{\pi}{4} 2D^2$, совершенно точно выражает площадь полукруга радиуса D, свертываемого в конус с диаметром основания D.

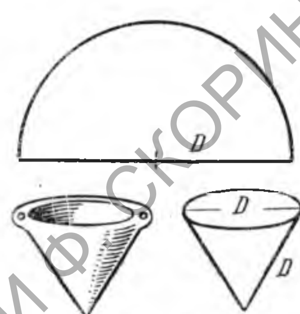

Рис. 2

Итак, мы видим, что рассматриваемая задача подобрана автором папируса как применение обычной в египетской математике формулы площади круга к вопросу, взятому из практической жизни и требующему лишь наглядных геометрических соображений. В связи с этим возникает вопрос: располагали ли египтяне формулой для вычисления поверхности л ю б о г о круглого конуса? Этот вопрос тем более интересен, что на рисунках древних шадуфов можно различить конические сосуды более вытянутой формы, чем те, которые изображены на рис. 3. Однако ни одна из задач,


Рис. 3. Древнеегипетский шадуф

кроме рассмотренной, как Московского, так и Лондонского папирусов не относится к такого рода сосудам. Можно лишь высказать весьма правдоподобное п р е д п о л о ж е н и е, что при вычислении поверхности конусов с отношением диаметра основания к образующей L, равным $^2/_3$ или $^1/_2$, египтянин мог использовать формулы $\frac{1}{3}\left(\frac{8}{9}\right)^2 L^2$ и $\frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}\right)^2 L^2$.

Перейдем теперь к вопросу о формулах, по которым в древнем Египте вычислялись объемы тел вращения. В папирусе Райнда имеется раздел, посвященный вычислениям «четырехугольных» и «круглых» амбаров для хлеба. Так, в задаче № 41 говорится: «Наставление, как вычислить круглый хлебный амбар в 9 и 10 локтей. Отними $^1/_9$ от числа 9, т. е. 1. В остатке будет 8. Умножь 8 на 8, это дает 64. Возьми 64 10 раз, это дает 640. Приложи к нему половину, это дает 960. Это и есть его объем».

Если обозначить данные этой задачи через $D = 9$ и $h = 10$, то объем окажется вычисленным по формуле

$$V = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2 h.$$

Между тем в другой аналогичной задаче ответ выглядит как $\frac{32}{27}\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2 h$. Какая же форма подразумевалась у «круглых» амбаров, и как могло случиться, что египетский автор решал задачи одного и того же типа по двум разным формулам? Еще Бобынин[1] высказал предположение, что формулы вычисления объемов амбаров относятся к телам вполне определенной формы, требующим введения соответствующих коэффициентов к формуле объема цилиндра $\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2 h$, в данных случаях $^3/_2$ и $^{32}/_{27}$. То

Рис. 4. Египетские амбары. Новое царство

обстоятельство, что идентичные задачи решались по двум р а з н ы м формулам, Бобынин объяснял тем, что обе формулы были найдены независимо друг от друга эмпирическим путем.

Чтобы разобраться в этом вопросе, обратимся к документальным изображениям египетских амбаров. Рисунки, относящиеся ко времени Нового царства (рис. 4), показывают, что амбары имели параболические очертания. Весьма возможно, что нижняя часть была цилиндрической или призматической, а верхняя, представляла соответственно или параболоид вращения, или имела вид купола, образованного пересечением четырех параболических цилиндров.

Если представить себе тело, состоящее из цилиндра высоты h и диаметра D, увенчанного параболоидом вращения высоты h, то, как показывает строгое вычисление, объем такого тела будет выражаться формулой $\frac{3}{2}\frac{\pi}{4} D^2 h$, что в точности совпадает с египетской формулой $\frac{3}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2 h$. Если же взять тело, состоящее из прямой призмы высоты h и с основанием в виде квадрата со стороной D, увенчанной куполом высоты h, образованным поверхностями четырех параболических цилиндров, то

[1] В. В. Б о б ы н и н, Математика древних египтян, М., 1880.

объем такого тела окажется $\frac{3}{2}D^2h$. В частности, если $D = h$, объем сведется к $\frac{3}{2}D^2$. Именно по такой формуле и вычисляются в папирусе Райнда объемы «четырехугольных» амбаров «в D локтей».

К чему же относится формула $\frac{32}{27}\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2h$? Если откинуть гипотезу Бобынина, согласно которой для вычисления однотипных амбаров египтяне пользовались различными формулами, противоречившими друг другу, то можно высказать лишь две гипотезы:

1) Формула $\frac{32}{27}\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2h$ относится к круглым телам иной формы. Если допу-

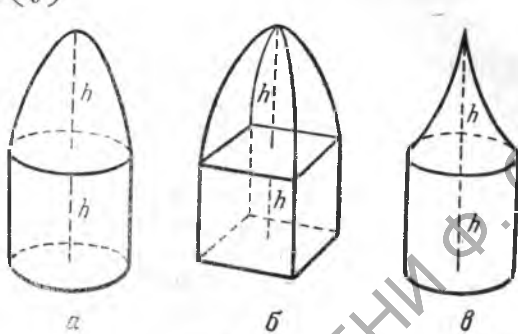

Рис. 5

стить, что весь амбар имеет высоту $2h$, а его нижняя половина — цилиндр диаметра D и высоты h, то на долю верхней части придется объем, составляющий почти половину объема конуса высоты h. Весь амбар должен был бы иметь вид, представленный на рис. 5, b, что совершенно невероятно.

2) Текст папируса содержит ошибку. В самом деле, выражение $\frac{32}{27}\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2h$ есть не что иное, как $\frac{3}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2h$ или $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 D^2h$. Ясно, что вычислитель ошибся, умножив $\frac{3}{2}D^2h$ два раза на $\left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Остается решить последний вопрос: каким образом были выведены формулы объемов для «амбаров» того и другого вида? Прежде всего ясно, что эти формулы не могли быть выведены математически, так как понятие параболы и параболоида не были знакомы египтянам. Скорее всего, та и другая формула были составлены на основании глазомера как простое приближенное выражение объема, а именно как среднее между объемом цилиндра или призмы высоты h и высоты $2h$. Но так как оно оказалось весьма точно выражающим объем реальных амбаров, по форме близких к рассмотренным геометрическим телам, то практика и узаконила единое правило: объем всего амбара составляет $1\,^1/_2$ объема его нижней части.

Проф. Г. П. Бо...