ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 512.542

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С. Ф. Каморников

Пусть G — конечная разрешимая группа, n — длина некоторого G-главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда. В статье доказано, что тогда в G существуют $4n-3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$. Это утверждение уточняет результат В. С. Монахова о том, что для любой конечной разрешимой ненильпотентной группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп M группы G таких, что $MF(G)=G$. Кроме того, в теореме 4.2 показывается, что в группе G существуют $4(n-k)$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\delta(G)$. Подгруппа $\delta(G)$ определяется как пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G, если группа не нильпотентна, и как G, если она нильпотентна.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фраттини.

S. F. Kamornikov. On a characterization of the Frattini subgroup of a finite solvable group.

Suppose that G is a finite solvable group, n is the length of a G-chief series of the group $F(G)/\Phi(G)$, and k is the number of central G-chief factors of this series. We prove that in this case G contains $4n-3k$ maximal subgroups whose intersection is $\Phi(G)$. This result refines V. S. Monakhov's statement that, for any finite solvable nonnilpotent group G, its Frattini subgroup $\Phi(G)$ coincides with the intersection of all maximal subgroups M of the group G such that $MF(G)=G$. In addition, it is shown in Theorem 4.2 that the group G contains $4(n-k)$ maximal subgroups whose intersection is $\delta(G)$. The subgroup $\delta(G)$ is defined as the intersection of all abnormal maximal subgroups of G if G is not nilpotent and as G otherwise.

Keywords: finite solvable group, maximal subgroup, Frattini subgroup.

MSC: 20D10, 20D25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-176-180

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Как известно, подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G определяется как пересечение всех ее максимальных подгрупп. Из основного результата работы [1] следует, что для получения подгруппы $\Phi(G)$ разрешимой группы G можно ограничиться пересечением лишь некоторых $3n$ ее максимальных подгрупп, где n — число дополняемых факторов некоторого главного ряда группы G.

Другой подход, направленный на сокращение числа максимальных подгрупп, пересечение которых дает подгруппу Фраттини, предложен В. С. Монаховым в [2], где установлено, что для любой разрешимой группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп M из G таких, что $MF(G)=G$ (здесь $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы G).

В данной работе отмеченные подходы определенным образом объединяются. Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть G — разрешимая группа, n — длина G-главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда. Тогда в G существуют $4n-3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.*

2. Основные определения и предварительные результаты

В статье используются определения и обозначения, принятые в [3].

Доказательство теоремы базируется на следующем известном результате Долфи.

Лемма 2.1 [4, теорема 1.4]. *Пусть G — разрешимая группа и V — конечный точный G-модуль. Если V вполне приводим, то существуют такие элементы $v_1, v_2, v_3 \in V$, для которых справедливо равенство $C_G(v_1) \cap C_G(v_2) \cap C_G(v_3) = 1$.*

Через $Core_G(H)$ далее обозначается *ядро* подгруппы H в группе G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в подгруппе H.

Лемма 2.2 [3, лемма A.16.3]. *Пусть $G = NH$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы N и подгруппы H. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $n \in N$, то $H \cap H^n = C_H(n)$;*

2) *$Core_G(H) = C_H(N)$.*

Напомним, что группа G называется *примитивной*, если она обладает такой максимальной подгруппой M, что $Core_G(M) = 1$. В этом случае подгруппа M называется *примитиватором* группы G.

Лемма 2.3 [3, лемма A.15.4]. *Если M — максимальная подгруппа группы G, то $G/Core_G(M)$ — примитивная группа.*

Следующий фундаментальный результат о примитивных группах, принадлежащий Бэру [5, следствия 1 и 2 леммы 2], мы приведем в виде леммы.

Лемма 2.4. *Пусть G — примитивная группа и M — ее примитиватор. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

(1) *группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, подгруппа N является абелевой и M — дополнение к N в G;*

(2) *группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, подгруппа N является неабелевой и M — добавление к N в G;*

(3) *группа G обладает двумя неабелевыми минимальными нормальными подгруппами N и N^* и M является дополнением в группе G к подгруппам N и N^*; $C_G(N) = N^*$, $C_G(N^*) = N$ и $N \simeq N^* \simeq NN^* \cap M$; если V — максимальная подгруппа группы G и $VN = VN^* = G$, то $V \cap N = V \cap N^* = 1$.*

Из леммы 2.4, в частности, следует, что разрешимая группа G примитивна тогда и только тогда, когда она представима в виде полупрямого произведения $G = NM$ минимальной нормальной подгруппы N и максимальной подгруппы M, причем $C_G(N) = N$.

Лемма 2.5. *Пусть G — разрешимая примитивная группа и M — ее примитиватор. Тогда существуют такие элементы $x, y, z \in G$, для которых справедливо равенство $M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 2.4 группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, причем N — абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p и M — дополнение к N в G. Ясно, что N — неприводимый M-модуль над полем $\mathrm{GF}(p)$ из p элементов. Так как $C_G(N) = N$, то $C_M(N) = 1$, т. е. N — точный M-модуль.

Ввиду леммы 2.1 существуют такие элементы $n_1, n_2, n_3 \in N$, для которых справедливо равенство $C_M(n_1) \cap C_M(n_2) \cap C_M(n_3) = 1$. Отсюда ввиду леммы 2.2 имеем равенство $M \cap M^{n_1} \cap M^{n_2} \cap M^{n_3} = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть G — разрешимая группа и M — ее максимальная подгруппа. Тогда существуют такие элементы $x, y, z \in G$, для которых справедливо равенство $M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = Core_G(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим группу $G/Core_G(M)$ и ее максимальную подгруппу $M/Core_G(M)$. Ввиду леммы 2.3 группа $G/Core_G(M)$ примитивна и $M/Core_G(M)$ — ее примитиватор. Тогда на основании леммы 2.5 существуют такие элементы

$$xCore_G(M), yCore_G(M), zCore_G(M) \in G/Core_G(M),$$

для которых справедливо равенство

$$(M/Core_G(M)) \cap (M/Core_G(M))^{xCore_G(M)}$$

$$\cap (M/Core_G(M))^{yCore_G(M)} \cap (M/Core_G(M))^{zCore_G(M)}$$

$$= Core_{G/Core_G(M)}(M/Core_G(M)).$$

Так как $Core_{G/Core_G(M)}(M/Core_G(M)) = 1$, то $M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = Core_G(M)$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Пусть G — контрпример минимального порядка, для которого теорема не выполняется.

Рассмотрим группу $G/\Phi(G)$ и ее подгруппу $F(G/\Phi(G))$. Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$ и $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, то длина $G/\Phi(G)$-главного ряда группы $F(G/\Phi(G))$ равна n и число центральных $G/\Phi(G)$-главных факторов этого ряда равно k. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $|G/\Phi(G)| < |G|$, а значит, ввиду выбора группы G существуют максимальные подгруппы $M_1/\Phi(G)$, $M_2/\Phi(G)$, $\ldots$, $M_{4n-3k}/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$, пересечение которых равно 1. Отсюда следует, что $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_{4n-3k} = \Phi(G)$. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Тогда ввиду теоремы A.10.6 из [3] и леммы 7.9 из [6] $F(G) = N_1 N_2 \ldots N_n$ — произведение n дополняемых минимальных нормальных подгрупп N_1, N_2, $\ldots$, N_n группы G. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что подгруппы N_1, N_2, $\ldots$, N_k центральны в G, а подгруппы N_{k+1}, $\ldots$, N_n не лежат в центре $Z(G)$ группы G. Рассмотрим G-главный ряд группы G:

$$1 = N_0 \subset N_1 \subset N_1 N_2 \subset \ldots \subset N_1 N_2 \ldots N_n = F(G).$$

Пусть M_i — максимальная подгруппа группы G, дополняющая главный фактор $N_1 N_2 \ldots N_i / N_1 N_2 \ldots N_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда, очевидно, подгруппа

$$F := Core_G(M_1) \cap Core_G(M_2) \cap \ldots \cap Core_G(M_n)$$

изолирует каждый главный фактор $N_1 N_2 \ldots N_i / N_1 N_2 \ldots N_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Это означает, что $F \cap F(G) = F \cap N_1 N_2 \ldots N_n \subseteq F \cap N_1 N_2 \ldots N_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq F \cap N_0 = 1$.

Предположим, что $F \neq 1$ и N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в F. Ввиду теоремы A.10.6 из [3] $F(G) = Soc(G)$. Поэтому $N \subseteq Soc(G) = F(G)$. Пришли к противоречию с тем, что $F \cap F(G) = 1$.

Таким образом, $F = 1$, а значит, $Core_G(M_1) \cap Core_G(M_2) \cap \ldots \cap Core_G(M_n) = 1 = \Phi(G)$.

Ввиду леммы 2.6 для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ существуют такие элементы $x_i, y_i, z_i \in G$, для которых справедливо равенство

$$M_i \cap M_i^{x_i} \cap M_i^{y_i} \cap M_i^{z_i} = Core_G(M_i).$$

Отметим, что подгруппы M_1, M_2, $\ldots$, M_k нормальны в G. Поэтому $Core_G(M_1) = M_1$, $Core_G(M_2) = M_2$, $\ldots$, $Core_G(M_k) = M_k$. Отсюда следует, что

$$\Phi(G) = Core_G(M_1) \cap Core_G(M_2) \cap \ldots \cap Core_G(M_n)$$

$$= M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k \cap (M_{k+1} \cap M_{k+1}^{x_{k+1}} \cap M_{k+1}^{y_{k+1}} \cap M_{k+1}^{z_{k+1}}) \cap \ldots \cap (M_n \cap M_n^{x_n} \cap M_n^{y_n} \cap M_n^{z_n}),$$

т. е. подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ представима в виде пересечения $4(n-k)+k = 4n-3k$ максимальных подгрупп группы G. Снова пришли к противоречию с выбором группы G. Теорема доказана.

4. Дополнения и замечания

В ряде случаев лемма 2.1 может быть уточнена. Так, в [7] доказано, что если G — группа нечетного порядка и V — конечный точный вполне приводимый G-модуль, то существуют такие элементы $v_1, v_2 \in V$, для которых справедливо равенство $C_G(v_1) \cap C_G(v_2) = 1$. Как отмечено в [8], такое же равенство имеет место и в случае, когда G – сверхразрешимая группа, но в общем случае это не так.

Следовательно, оценка числа максимальных подгрупп, приведенная в теореме 1.1, является точной, но в некоторых случаях она может быть существенно улучшена. В частности, по аналогии с теоремой 1.1 доказывается следующая

Теорема 4.1. *Пусть G — группа нечетного порядка, n — длина G-главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда. Тогда в G существуют $3n-2k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.*

В [9] В. Гашюц изучил свойства подгруппы $\Delta(G)$, которая определяется как пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G, если группа ненильпотентна, и как G, если она нильпотентна.

В [10] В.С. Монахов показал, что для любой разрешимой ненильпотентной группы G подгруппа Гашюца $\Delta(G)$ совпадает с пересечением всех абнормальных максимальных подгрупп M группы G таких, что $MF(G) = G$.

Из основного результата работы [11] следует, что для получения подгруппы $\Delta(G)$ разрешимой группы G можно ограничиться пересечением лишь некоторых $3n$ ее максимальных подгрупп, где n — число дополняемых эксцентральных факторов некоторого главного ряда группы G.

Объединяя подходы работ [10] и [11], по аналогии с теоремой 1.1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть G — разрешимая ненильпотентная группа, n — длина G-главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k — число центральных G-главных факторов этого ряда. Тогда в G существуют $4(n-k)$-максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Delta(G)$.*

Отметим еще, что в [12] главные результаты работ [2] и [10] распространены на произвольные конечные группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kamornikov S.F.** Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups // Int. J. Group Theory. 2017. Vol. 6, no. 2. P. 1–5.
2. **Монахов В.С.** Замечание о максимальных подгруппах конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, no. 4. С. 31–33.
3. **Doerk K, Hawkes T.** Finite soluble groups Berlin; N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8 .

4. **Dolfi S.** Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360, no. 1. P. 135–152. doi: 10.1090/S0002-9947-07-04155-4 .
5. **Baer R.** Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115-187.
6. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп М.: Наука, 1978. 272 с.
7. **Dolfi S.** Intersections of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 2005. Vol. 37. P. 61–66. doi: 10.1112/S0024609304003807 .
8. **Wolf T.** Large orbits of supersoluble linear groups // J. Algebra. 1999. Vol. 215. P. 235–247. doi: 10.1006/jabr.1998.7730 .
9. **Gaschütz W.** Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1953. Bd. 58. S. 160–170. doi: 10.1007/BF01174137 .
10. **Монахов В.С.** Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2004. № 6 (27). С. 81.
11. **Каморников С.Ф.** Об одной характеризации подгруппы Гашюца конечной разрешимой группы // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20, № 6. С. 65–75.
12. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Сыроквашин А.В.** Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2012. № 2 (11). С. 62–64.

Каморников Сергей Федорович
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступила 29.08.2017

REFERENCES

1. Kamornikov S.F. Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups. *Int. J. Group Theory*, 2017, vol. 6, no. 2, pp. 1–5.
2. Monakhov V.S. Remarks on maximal subgroups of finite groups. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 2003, vol. 47, no. 4, pp. 31–33 (in Russian).
3. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New-York: Walter de Gruyter, 1992, 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8 .
4. Dolfi S. Large orbits in coprime actions of solvable groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 360, no. 1, pp. 135–152. doi: 10.1090/S0002-9947-07-04155-4 .
5. Baer R. Classes of finite groups and their properties. *Illinois J. Math.*, 1957, vol. 1, pp. 115–187.
6. Шеметков, Л.А.Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow, Nauka Publ. 1978, 272 p.
7. Dolfi S. Intersections of odd order Hall subgroups. *Bull. London Math. Soc.*, 2005, vol. 37, no. 1, pp. 61–66. doi: 10.1112/S0024609304003807 .
8. Wolf T. Large orbits of supersoluble linear groups. *J. Algebra*, 1999, vol. 215, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1006/jabr.1998.7730 .
9. Gaschütz W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1953, vol. 58, no. 1, pp. 160–170. doi: 10.1007/BF01174137 .
10. Monakhov V.S. Remark on the intersection of abnormal maximal subgroups of finite groups. *Izv. Gomel. Gos. Univ. Im. F. Skoriny*, 2004, vol. 27, no. 6, pp. 81.
11. Kamornikov S.F. One characterization of the Gaschütz subgroup of a finite soluble group. *Fundam. Prikl. Mat.*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 65–75.
12. Vasil'ev A.F., Vasil'eva T.I., Syrokvashin A.V. A note on intersections of some maximal subgroups of finite groups. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2012, no. 2(11), pp. 62–64.

The paper was received by the Editorial Office on August 29, 2017.

Sergei Fedorovich Kamornikov, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: sfkamornikov@mail.ru .